

物理数学I 講義ノート (2019年度)

松尾 泰

2019年11月6日

目次

第 I 部 複素関数論	7
第 1 章 予備知識	8
1.1 複素数	8
1.2 Taylor 展開	9
第 2 章 無限和と収束性	10
2.1 数列の収束性	10
2.2 無限級数	12
2.3 無限積	13
2.4 絶対収束と条件収束	13
2.5 収束の判定法	14
2.6 関数級数の収束性	15
2.7 べき級数	16
第 3 章 複素関数と複素積分	18
3.1 複素関数と正則性	18
3.2 複素積分	20
3.3 Cauchy の積分定理	21
3.4 Cauchy-Goursat の定理	23
3.5 Taylor 展開と Laurent 展開	23
3.5.1 Taylor 展開	23
3.5.2 Laurent 展開	24

3.5.3 例	25
第 4 章 複素関数の大局構造	26
4.1 特異点の分類	26
4.1.1 Weierstrass の定理	27
4.1.2 無限遠点の取り扱い	27
4.2 Liouville の定理と正則関数の大局的構造	27
4.3 解析接続	28
4.4 多価関数とリーマン面	29
4.4.1 Cut	30
4.4.2 Riemann 面	30
4.4.3 多価関数の複素積分	31
第 5 章 留数積分	33
5.1 留数定理	33
5.2 三角関数の一周積分	34
5.3 実軸上の積分	34
5.3.1 無限遠の積分路の追加による閉積分路の形成	34
5.3.2 指数関数を含む場合：Jordan の補題	35
5.3.3 多価関数：Cut をまたぐ積分	37
5.4 ガウス分布の積分	38
第 6 章 複素関数の発展的話題	40
6.1 部分分数展開と無限積展開	40
6.1.1 部分分数展開	41
6.1.2 無限積展開	42
6.2 ガンマ関数・ベータ関数・ゼータ関数	43
6.2.1 ガンマ関数 (Gamma function)	43

6.2.2	ベータ関数	46
6.2.3	ゼータ関数	48
6.3	漸近展開と最急降下法	51
6.4	デルタ関数と主値積分	55
6.4.1	デルタ関数	55
6.4.2	複素関数の境界値としてのデルタ関数	56
6.4.3	主値積分	57
第7章	等角写像	58
7.1	複素写像と等角性	58
7.2	等角写像の物理への応用	58
7.2.1	等角写像と調和方程式	58
7.2.2	流体力学	59
7.2.3	電磁気学	60
7.3	等角写像の例	60
7.3.1	一次分数変換	60
7.3.2	その他の複素変換	61
第II部	常微分方程式論	64
第8章	常微分方程式	65
8.1	常微分方程式の解の存在と一意性	65
8.1.1	常微分方程式の一般形と一階の微分方程式への帰着	65
8.1.2	解の存在と一意性	66
8.2	積分により可解な微分方程式の例	67
8.3	線形微分方程式	68
8.3.1	解から微分方程式へ (Wronskian の方法)	68

8.3.2	一階線形微分方程式	69
8.3.3	2階斉次微分方程式	70
第9章	定数係数線形微分方程式と Laplace 変換	71
9.1	定数係数線形微分方程式	71
9.1.1	非斉次方程式	72
9.2	Laplace 変換	72
9.2.1	その他の積分変換	72
9.3	Laplace 変換の例	73
9.4	基本的な性質	73
9.5	逆 Laplace 変換	75
9.6	Laplace 変換を用いた定数係数線形微分方程式の解法	75
9.6.1	微分方程式の解法の例	76

この講義ノートは <http://www-hep.phys.s.u-tokyo.ac.jp/~matsuo> よりダウンロードできる。板書の内容はこのノートに近いので、板書をそのままノートに取るよりは、この講義ノートと比較しながら重要なポイントは何か、疑問点はどこかを考えることに集中し、講義を聴講することが望ましい。

参考書など： 講義の際の解説には時間的な限界もあるので証明の厳密性よりは、各公式が持つ意味、考え方を中心に解説している。証明については定理の内容をより鮮明に説明するために有用であれば紹介している。より数学的に深い知識を得たい学生は専門書を当たるべきであろう。

- 有馬・神部「複素関数論」(1991 共立)：この講義に近い内容
- 寺澤寛一「自然科学者のための数学概論」(1954 岩波)
- Arfken and Weber “Mathematical Methods for Physicists” (Academic Press, 7th edition 2011) アメリカで標準的に用いられている教科書
- Boas “Mathematical Methods in Physical Sciences” (Wiley 2004) 同上
- Whittaker and Watson “A course of modern analysis” (Cambridge 1902) 古典解析学の名著。最も詳しく信頼できる記述がなされており、解析学関連の疑問点はこの本を読めばほぼ解決する。
- 森口・宇田川・一松「数学公式集 I, II, III」(岩波)

ソフト： 数式処理ソフトを用いると手計算では難しい複雑な数理解析・計算を効率よく行うことができる。研究レベルでも有用なので覚えておくと役に立つ。これらのソフトでは、複素解析を始め様々な数学公式が組み込まれているので、学習・計算に悩んだ時にはソフトや関連サイトで調べてみるのも一つの方法であろう。個人的なお勧めとしては

- Mathematica (Wolfram research):高価なソフトだが、高度な組み込み関数と柔軟な言語仕様でとても便利。東大はサイトライセンスを持っているので申し込むと比較的安価に導入できる。Wolfram alpha というサイト（アプリ版もある）では対話形式ではあるが Mathematica とほぼ同等の機能を無料で使える。ちょっとした計算や公式の確認に便利。
- 無料で使える数式処理ソフトとしてはやや古い Maxima がある。因数分解、微積分、行列計算などの一般的な計算であれば実用に耐える。Maxima などのフリーの数式処理システムは SageMath プロジェクトに統合されつつある。含まれているソフトとしては Numpy (python

の数値計算パッケージ)、SciPy(同じく理系の計算をサポートするパッケージ), matplotlib(同じくプロットのサポートパッケージ) , Sympy (同じく数式処理パッケージ) , Maxima(上述の数式処理システム), GAP(群論に特化したソフト), FLINT(整数論に特化したソフト) , R (統計処理専用ソフト) など。今の所それぞれのソフトをゆるく統合した感じだが将来的には便利なツールになりそう。

- Matlab: 東京大学がライセンスを持っているため学生は無料で使える。基本的には数値計算ソフトだが、数式処理もアドインを用いて行うことができる。深層学習、統計処理などアドインも充実しているので覚えておくと学生生活が楽になる。

第I部

複素関数論

第1章 予備知識

1.1 複素数

複素数とは2つの実数 x, y を虚数単位 i を用いて組み合わせた

$$z = x + iy$$

のような数全体である。虚数単位は $i^2 = -1$ を満たす数である。複素数の実部 (Real part: Re) と虚部 (Imaginary part: Im) を

$$\operatorname{Re}(z) = x, \quad \operatorname{Im}(z) = y$$

のように定義する。複素数の和、積は $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$ (x_1, x_2, y_1, y_2 は実数) に対して以下のように定義される。

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \quad (1.1)$$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \quad (1.2)$$

複素数は (x, y) を座標とする2次元平面で書き表すことができる。これを複素平面と呼ぶ。複素数 $z = x + iy$ を

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (1.3)$$

のように正の実数 r と角度変数 θ で書き表すことができる。

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan(y/x) \quad (1.4)$$

このとき r を z の絶対値 (absolute value) と呼び $r = |z|$ のように書く。また θ は偏角 (argument) と呼ばれ $\theta = \arg(z)$ などと書かれる。三角関数の周期性 ($\sin(\theta + 2\pi) = \sin(\theta)$) により偏角には 2π の任意性がある。つまり一つの複素数の偏角として $\theta + 2\pi n$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) のような複数の書き方が可能である。この任意性を固定するために偏角を $-\pi < \arg(z) \leq \pi, 0 \leq \arg(z) < 2\pi$ に制限することができる。

指数関数と三角関数の関係 (Euler の関係式) :

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (1.5)$$

を用いると複素数とその絶対値、偏角の関係を簡明に書くことができる。

$$z = re^{i\theta} \quad (1.6)$$

この関係はとても便利で、例えば関係式 $e^{i(\theta_1+\theta_2)} = e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}$ より三角関数の加法定理

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2, \quad \sin(\theta_1 + \theta_2) = \cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2,$$

を導くことができる。 z のべき乗も簡単にかける。

$$z^n = r^n e^{in\theta}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

複素数 $z = x + iy = re^{i\theta}$ に対してその複素共役 (complex conjugate) を次のように定義する。

$$\bar{z} = x - iy = re^{-i\theta}$$

複素数の絶対値と偏角は z, \bar{z} を用いて

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}, \quad \arg(z) = \frac{1}{2i} \log(z/\bar{z}) \quad (1.7)$$

のようにより簡明にかける。

1.2 Taylor 展開

実関数の Taylor 展開は複素変数の場合に自然に拡張される。(後述) 実変数関数の Taylor 展開は

$$f(x) = f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n, \quad f^{(n)}(a) = \left. \frac{d^n f}{dx^n} \right|_{x=a}. \quad (1.8)$$

多変数関数の Taylor 展開は

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(a_1, \dots, a_n) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i_1+\dots+i_n=m} \frac{i_1! \cdots i_n!}{m!} f^{(i_1, \dots, i_n)}(a_1, \dots, a_n) \quad (1.9)$$

ここで

$$f^{(i_1, \dots, i_n)}(a_1, \dots, a_n) = \left. \frac{\partial^{i_1}}{\partial x_1^{i_1}} \cdots \frac{\partial^{i_n}}{\partial x_n^{i_n}} f(x_1, \dots, x_n) \right|_{\vec{x}=\vec{a}} \quad (1.10)$$

第2章 無限和と収束性

何故収束性を学ぶのか？

物理数学では無限和、無限積、積分などで定義される関数が現れる。

- 無限和で定義される関数 (例)

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$
$$F(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n! (c)_n} z^n, \quad (a)_n = a(a+1) \cdots (a+n-1)$$

- 無限積で定義される関数

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n} \right], \quad \gamma \text{ (Euler 定数)} := \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{l=1}^m \frac{1}{l} - \ln m \right)$$

- 積分で表される関数

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$$

このような形で定義されている関数に対してそれらが

- どこで「定義」されているのか。無限和、積、積分はどの領域で意味を成すか。
- これらの関数は「連続」なのか。微積分はどのように行えばよいのか。

一応、系統的に理解しておく必要がある。その為、無限級数（関数）の収束性の知識はどうしても必要である。

2.1 数列の収束性

実数の数列 $\{a_n\}_{n=1,2,3,\dots}$ が収束するという定義は次のステップを確認することによりなされる

1. ある実数 a が存在し(exist $\rightarrow\exists$)
2. 任意の正の小さな実数 ϵ に対して (arbitrary $\rightarrow\forall$)
3. 十分大きな自然数 N が存在し(exist $\rightarrow\exists$)
4. N より大きな任意の自然数 n に対して
5. $|a_n - a| < \epsilon$ となる

以上のような設定・主張を記号で

$$\exists a \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}_+ \text{ s.t. } |a_n - a| < \epsilon \text{ for } \forall n > N$$

等と書く。大まかに言って s.t.=”such that” の前が設定あるいは条件、後ろが主張を表している。

以上のような条件が満たされているとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

と表す。要は、 n が増大するにつれ実数 a に際限なく近づくことができると言っている。

別の言い方をすると収束値 (a) からの誤差 (ϵ) が n を大きくするといくらでも小さくできるという状況を表している。

収束する数列の例

例 1 $a_n = 2^{-n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)。この場合収束値は $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 。

$\forall \epsilon > 0$ に対して $N = \log_2(1/\epsilon) + 1$ とすると $\forall n > N$ に対して $|a_n| < \epsilon$ 。□

例 2 $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ 。 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e$ (自然対数の底)

収束しない数列の例

例 3 $a_n = \ln n$: 発散

例 4 $a_n = (-1)^n(1 + \frac{1}{n})$: 収束もしないし発散もしない。 ± 1 に収束する部分数列がある (集積点)

極限が満たす性質

- $\lim_n a_n + \lim_n b_n = \lim_n (a_n + b_n)$

- $\lim_n(a_n b_n) = (\lim_n a_n)(\lim_n b_n)$
- $\lim_n(a_n)^{-1} = a^{-1}$

基本定理

1. 上限のある単調増加数列 (任意の n に対して $a_{n+1} > a_n$, かつ $a_n < a$ となる数列) は収束する。
2. Cauchy の収束定理 (Principle of convergence): 数列 $\{a_n\}$ が収束するための必要十分条件は

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \forall n, m > N, \text{ s.t. } |a_n - a_m| < \epsilon$$

2.2 無限級数

級数とは数列 a_n に対して

$$s_n = \sum_{m=1}^n a_j$$

のように数列の和で表されるもの。級数の収束とは和 s_n が数列の意味で収束することを意味する。

数列の収束の基本定理からの帰結

- 基本定理 1 の帰結 : 正の数列 $a_n > 0$ に対して s_n に上限があれば級数は収束する。
- 基本定理 2 の帰結 :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N, \text{ s.t. } |s_n - s_m| = \left| \sum_{r=m+1}^n a_r \right| < \epsilon \text{ for } \forall n, m > N \rightarrow s_n \text{ is convergent}$$

例

1. $a_n = 2^{-n}$ に対して $s_n = \sum_{r=1}^n a_r$ は収束。[証明] $a_n > 0$ かつ $s_n < 1$ となるので。実際には
2. $a_n = \frac{1}{n}$ に対して $s_n = \sum_{r=1}^n a_r$ は発散。[証明]

$$s_{2n} - s_n = \sum_{r=n+1}^{2n} \frac{1}{r} > \sum_{r=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Cauchy の収束定理が満たされないので発散。

2.3 無限積

無限積 $P = \prod_{r=1}^{\infty} a_r$ が収束するとは、数列 $\{P_n = \prod_{r=1}^n a_r\}$ が収束することを意味する。両辺の対数をとった級数

$$\log P_n = \sum_{r=1}^n \ln(a_r)$$

が収束することと同値である。収束するためには $\lim_{r \rightarrow \infty} \ln(a_r) = 0$ つまり $\lim_{r \rightarrow \infty} a_r = 1$ となる必要がある。さらに r が大きい値のときに $a_r = 1 + q_r$ (q_r は十分小さな数) と書いたときに

$$\sum_{r=1}^{\infty} \ln(1 + q_r) \sim \sum_{r=1}^{\infty} (q_r + \frac{1}{2}q_r^2 + \dots)$$

と展開できるので無限積 P が 0 でない有限値に収束するための必要十分条件は級数 $\sum_r q_r$ が収束することとなる。

2.4 絶対収束と条件収束

定義：無限級数 $\sum_{r=1}^{\infty} a_r$ が絶対収束するとは級数 $\sum_{r=1}^{\infty} |a_r|$ が収束することである。

定義：無限級数 $\sum_{r=1}^{\infty} a_r$ が条件収束するとは級数 $\sum_{r=1}^{\infty} a_r$ は収束するが絶対収束しないことである。

定理：絶対収束する級数は収束する。

[証明] Cauchy の定理により $\forall \epsilon, \exists N, \forall n, m > N$, の下で

$$\sum_{r=m+1}^n |a_r| < \epsilon$$

のようにできる。この時、同じ ϵ, N, n, m に対して

$$\left| \sum_{r=m+1}^n a_r \right| \leq \sum_{r=m+1}^n |a_r| < \epsilon$$

となる (三角不等式)。Cauchy の定理により $\sum a_n$ も収束する。□

定理：条件収束級数では和を取る順番により和の値が変わりうる。

[例] $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ とするとこの数列は条件収束。($\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ は発散数列。一方この和は級数展開 $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ を用いると $\ln(2)$ に収束。つまり条件収束級数である。

一方 $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ の代わりに $\Sigma = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots$ と置いてみる。この時 $\sigma_n = \sum_{r=1}^n \frac{1}{r}$ とすると $S_{2n} = \sigma_{2n} - \sigma_n$, $\Sigma_{3n} = \sigma_{4n} - \sigma_{2n} + \frac{\sigma_{2n} - \sigma_n}{2} = S_{4n} + \frac{1}{2}S_{2n}$ 。つまり

$$\Sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \Sigma_{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{4n} + \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \frac{3}{2}S \neq S.$$

一般に条件収束級数（各項が実数の場合）は順番を変更すると正の項の和と負の項の和に分解できてそれぞれの和は発散する。条件収束級数ではこれらの差 $\infty - \infty$ を取るので差が有限だったとしても順番により不定性が必ず残る。

定理：絶対収束級数では和は順番によらない。

2.5 収束の判定法

級数の収束性を判定する方法として、下記の方法がよく用いられる。

[比較の定理] 2つの級数 $\sum_n u_n$ と $\sum_n v_n$ に対して $|u_n| < C|v_n|$ (C は正の整数) かつ $\sum_n v_n$ が絶対収束するとき $\sum_n u_n$ も絶対収束する。

比較対象の v_n としてよく使われるものとして

- $v_n = z^n$ ($|z| < 1$ [収束性の証明] $\sum_{r=n+1}^m |z|^r = |z|^{n+1} \frac{1-|z|^{m-n}}{1-|z|}$ 。 $|z| < 1$ の場合 n を十分大きく取ればこの和はいくらでも小さくなる。Cauchy の判定法により収束する。

- $v_n = \frac{1}{n^s}$ (s は 1 より大きな実数) [収束性の証明]

$$1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s} + \cdots < 1 + \frac{1}{2^{s-1}} + \frac{1}{4^{s-1}} + \cdots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{s-1}}}$$

単調増加で上界があるので収束。

$v_n = z^n$ を用いた判定法：

- Cauchy の判定法: $0 < q < 1$ の定数 q に対し、適当な N より大きなすべての n に対して $|a_n|^{1/n} \leq q$ であれば級数 $\sum a_n$ は絶対収束。
- D'Alembert の判定法: $0 < q < 1$ の定数 q に対し、適当な N より大きなすべての n に対して $|a_n/a_{n-1}| \leq q$ であれば級数 $\sum a_n$ は絶対収束。

$v_n = n^{-s}$ を用いた判定法：

- Raabe の判定法： $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| = 1$ であってもある正の数 α が存在して十分大きな n に対して $n(|a_{n+1}/a_n| - 1) \leq -1 - \alpha$ が成立すれば、級数 $\sum a_n$ は絶対収束。

例：超幾何関数

$$F(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n! (c)_n} z^n, \quad (a)_n := a(a+1) \cdots (a+n-1) \quad \text{Pochhammer 記号}$$

この無限級数で定義される関数 $F(a, b; c; z)$ は

- $|z| < 1$ で絶対収束
- $|z| > 1$ で発散
- $|z| = 1$ の場合 $\operatorname{Re}(a + b - c) < 0$ の場合、絶対収束。

2.6 関数級数の収束性

関数 $S(x)$ が級数により定義されているものとする。

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

ここで $f_n(x)$ は共通の定義域 C を持つものとする。 C の部分集合 D の点 x で級数が収束するとき領域 D で左辺の関数 $S(x)$ が定義される。

関数級数で気を付けるべきところ

- 各 $f_n(x)$ が D で連続の場合、 $S(x)$ も D で連続関数か。なお関数 $f(x)$ が点 x で連続であるとは、 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ s.t. $|f(x') - f(x)| < \epsilon$ for $\forall x' \in (x - \delta, x + \delta)$ のように表現される。
- 項別微分・項別積分可能か (和と微積分を交換可能か)

$$\frac{dS}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{df_n}{dx}, \quad \int dx S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int dx f_n(x)$$

関数級数で連続性が破れる例 : $f_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ と取る。この関数はすべての実数 x に対して連続。一方、級数は $x \neq 0$ では

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = x^2 \frac{1}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = 1 + x^2$$

$x = 0$ では $f_n(0) = 0$ なので $S(x) = 0$ である。比較すると $x = 0$ において連続性が破れている。

一様収束 : 関数級数の連続性を担保する性質が一様収束性である。 $S_n(x) = \sum_{r=1}^n f_r(x)$ として、

- 関数級数の収束とは定義域 D の各点 x において、 $\forall \epsilon > 0, \exists N > 0$ (一般の場合には x, ϵ に依存する), s.t. $|S_n(x) - S_m(x)| < \epsilon$ for $\forall n, m > N$ となることである。
- 上記の収束の条件で ϵ を決めるとき N が $x \in D$ によらずに決まる場合、一様収束と呼ぶ。つまり誤差に相当する ϵ の範囲内に到達するために足すべき関数が全域で N で抑えられる場合である。

定理： 連続関数の無限和は、和が δ 一様収束する場合、連続である。

[証明] $S(x) = \sum_{n=1}^N f_n(x) + \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x) = S_N(x) + R_N(x)$ と書く。一様収束性により $\forall \epsilon > 0, \exists N$, s.t. $|R_n(x)| < \frac{\epsilon}{3}$ for $\forall n > N, \forall x \in D$ とできる。同じ ϵ に対して $\exists \delta > 0$ s.t. $|S_n(x) - S_n(x')| < \frac{\epsilon}{3}$ for $\forall x' \in (x - \delta, x + \delta)$ とできる。この時三角不等式により

$$|S(x) - S(x')| = |S_n(x) + R_n(x) - S_n(x') - R_n(x')| \leq |S_n(x) - S_n(x')| + |R_n(x)| + |R_n(x')| < \epsilon$$

定理： 連続関数の無限和は、和が δ 一様収束する場合、項別微分、項別積分可能である。

[証明] $R_n(x)$ はすべての x に対して十分小さいので微積を取っても十分小さい。一方 $S_n(x)$ は有限和なので微積分と順序を入れ替えることができる。

2.7 べき級数

$\{c_n\}$ を複素数の数列とすると、複素変数 z を用いた級数

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

をべき級数と呼ぶ。

注意：

- 複数級数 $\sum c_n$ の絶対収束： 数列 $\sum_n |c_n|$ が収束するとき絶対収束と呼ぶ。
- 複数関数級数 $\sum c_n(z)$ の一様収束： 複素平面上の領域 D の任意の点 $z \in D$ に対して $\forall \epsilon, \exists N$ (z によらない) s. t. $|S_n(z) - S_m(z)| < \epsilon$ for $\forall n, m > N$ とできるとき領域 D で一様収束できるといふ。 ($S_n(z) = \sum_{j=0}^n c_j(z)$)

定理： 任意のべき級数 $P(z)$ に対してある長さ $R \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ が存在して、 $P(z)$ は

- $|z| < R$ で一様かつ絶対収束
- $|z| > R$ で発散

する。なお、 $|z| < R$ で一様収束するとは任意の十分小さい正数 $\epsilon > 0$ に対して領域 $|z| \leq R - \epsilon$ で一様収束することを意味する。この R を収束半径と呼ぶ。(証明内に R の求め方も書いてあるのに注意)

[証明] $R = \lim_{n \rightarrow \infty} (|c_n|)^{-1/n}$, (または $R = \lim_{n \rightarrow \infty} |c_n/c_{n+1}|$) とすると $\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n z^n|^{1/n} = |z/R| < 1$ となるので Cauchy (D'Alembert) の判定法により $|z| < R$ では絶対かつ一様収束。逆に $|z| > R$ では $|c_n z^n|$ はゼロに収束しないので発散。

べき級数の例

- 指数関数: $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ 。 $c_n = 1/n!$ となるので $R = \lim_{n \rightarrow \infty} |c_n/c_{n+1}| = \infty$ 。(収束半径 ∞)
- 三角関数・双曲線関数: これらは指数関数の組み合わせでかけるので収束半径は ∞ 。

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!},$$

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

- 有理関数: (例) $P(z) = \frac{1}{z-a}$ ($a \neq 0 \in \mathbb{C}$)。展開式は $P(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{a^{n+1}}$ 。つまり $R = \lim_{n \rightarrow \infty} |c_n/c_{n+1}| = |a|$ 。この収束半径は原点から有理式が発散する点までの距離に等しい。一般の有理式は多項式 $p(z), q(z)$ を用いて $P(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ となる。この場合の収束半径は $q(z)$ がゼロとなる点を $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ とすると $R = \min(|a_1|, \dots, |a_n|)$ となる。(証明せよ)

第3章 複素関数と複素積分

3.1 複素関数と正則性

複素関数とは複素平面から複素平面への写像で一般に

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z = x + iy, \quad x, y, u(x, y), v(x, y) \in \mathbb{R},$$

のように書ける。

定義 複素関数 $f(z)$ が点 $z_0 = x_0 + iy_0$ で正則 (holomorphic) であるとは以下の同値な3つの条件で定義される。(どれを用いても同じ条件である)

1. Cauchy-Riemann の関係式

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

2. 関数 $f(z)$ が \bar{z} によらない ($\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$)

3. 極限值 $\lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} := f'(z)$ が h の偏角によらず一意に決まる。

3つの定義の同値性

- 1 \leftrightarrow 2: $z = x + iy, \bar{z} = x - iy$ なので $x = \frac{z+\bar{z}}{2}, y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ 。これから

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \left(\frac{\partial x}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial y} \right) (u + iv) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + i \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

これから $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ と Cauchy-Riemann の関係式は同値。

- 1 \leftrightarrow 3: $h = \Delta x + i\Delta y$ と置く。1を仮定すると

$$f(z+h) - f(z) = h \cdot f'(z)$$

と書ける。 $f'(z) = p(x, y) + iq(x, y)$ と置き関係式を書き換えると

$$(p + iq)(\Delta x + i\Delta y) = (u_x + iv_x)\Delta x + (u_y + iv_y)\Delta y$$

ここで $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ などの略号を用いた。両辺の $\Delta x, \Delta y$ の係数を比較すると

$$p = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad q = \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

となる。これは Cauchy-Riemann の関係式にほかならない。

例 :

- $f(z) = z^n$ ($n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$)。 $f(z+h) - f(z) = (z+h)^n - z^n = nhz^{n-1} + O(|h|^2)$ となるので正則。
 $f'(z) = nz^{n-1}$ (実数関数の微分と同じ)
- $f(z) = \bar{z}^n$: 条件 2 より正則関数ではない。
- $f(z) = z^{-1}$: $z = 0$ では微分可能でないので正則ではないがそれ以外の複素平面の点では正則。
- $f(z) = \operatorname{Re}(z)$ など。 $f(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$ などと書いて \bar{z} に依存するので正則でない。(Cauchy-Riemann の関係式が成り立たないのを確認せよ)

正則関数の微分: 基本的に実関数の微分と一致する。

- $\frac{d}{dz}(z^n) = nz^{n-1}$
- $\frac{d}{dz}(\exp(z)) = \exp(z)$, $\frac{d}{dz}(\sin(z)) = \cos(z)$, $\frac{d}{dz}(\cos(z)) = -\sin(z)$ 。級数展開を用いて証明せよ
(収束半径無限大なので任意の点で項別微分可能)

ラプラス方程式と調和関数: n 個の実変数 x_1, \dots, x_n に対して微分演算子

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

をラプラシアン (ラプラス演算子) と呼ぶ。 n 変数関数 $f(x_1, \dots, x_n)$ がラプラス方程式

$$\Delta f(x_1, \dots, x_n) = 0$$

を満たすとき $f(x_1, \dots, x_n)$ を調和関数であるという。ラプラス方程式は物理学では広く表れる。以下の定理はラプラス方程式が $n = 2$ (2次元) の場合には簡明に解けることを示している。

定理 : 正則関数の実部、虚部はそれぞれ (2次元) 調和関数である。

証明 : 実部 u と虚部 v が Cauchy-Riemann の関係式を満たすとすると

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2)u = \partial_x(\partial_y v) - \partial_y(\partial_x v) = 0$$

v についての証明も同様。

定理 調和関数 $u(x, y)$ を実部（虚部でも可）とするような正則関数 $f(z)$ が存在する。

証明: u が与えられたとき、 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ を満たす v を構成すれば良い。適当な y_0 に対して $v(x, y) = \int_{y_0}^y \partial_\eta v(x, \eta) d\eta + C(x)$ と書けることに注意。ここで $C(x)$ は適当な x のみに依存する関数。（証明するためには y で偏微分して両辺が一致することを示す）。コーシーの関係式を用いると

$$v(x, y) = \int_{y_0}^y d\eta \frac{\partial v(x, \eta)}{\partial \eta} + C(x) = \int_{y_0}^y d\eta \frac{\partial u}{\partial x}(x, \eta) + C(x)$$

これを x で偏微分して

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \int_{y_0}^y d\eta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C'(x) = - \int_{y_0}^y d\eta \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + C'(x) = - \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=y_0} + C'(x)$$

最後の二項を消すには $\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=y_0} + C'(x) = 0$ のように $C'(x)$ を選択すれば良い。

二次元の物理系では相互作用が入っていても厳密に解けるモデルが存在する。正則関数はそのような系で重要な役割を果たす。

3.2 複素積分

複素平面上の曲線 C 上の複素関数の積分を定義する。曲線が補助変数 t を用いて $\{z(t)\} t \in [0, 1]$ と表記されていたとき、曲線上の積分を

$$\int_C dz f(z) = \int_0^1 dt \frac{dz(t)}{dt} f(z(t))$$

と定義する。この定義は補助変数 t の選択に依存しないことに注意する。例えば t の代わりに別の変数 $t = \varphi(t')$, ($\varphi(0) = 0, \varphi(1) = 1$) を単調増加関数 $\varphi(t')$ で変数変換したとしても積分の値は変化しない。つまり

$$\int_0^1 dt' \frac{dz(\varphi(t'))}{dt'} f(z(\varphi(t'))) = \int_0^1 dt' \frac{d\varphi(t')}{dt'} \frac{dz(t)}{dt} f(z(t)) \Big|_{t=\varphi(t')} = \int_0^1 dt \frac{dz(t)}{dt} f(z(t))$$

パラメータを変えても積分の値が変化しないことを reparametrization invariance と英語で書く。余談であるが重力の方程式（Einstein 方程式）は reparametrization invariance を指導原理として導かれる。（座標を変えても物理は変化しない）

例: $f(z) = z^n$ を複素平面上の単位円周 $|z| = 1$ 上で積分する。複素平面上の単位円を $z = e^{2\pi it}$ のように表示する。（ $t \in [0, 1]$ ）このとき

$$\oint dz f(z) = \int_0^1 dt \frac{de^{2\pi it}}{dt} (e^{2\pi it})^n = 2\pi i \int_0^1 dt e^{2\pi i(n+1)t} = \begin{cases} 2\pi i & n = -1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

例2 $f(z) = a+bz$, $a, b \in C$, 閉じた積分路 $I : (0, 0) \rightarrow (1, 0)$, $II : (1, 0) \rightarrow (1, 1)$, $III : (1, 1) \rightarrow (0, 1)$, $IV : (0, 1) \rightarrow (0, 0)$

- I 上の積分: $z = t$ と置くと $\int_I f(z)dz = \int_0^1 (a + bt)dt = a + \frac{b}{2}$
- II 上の積分: $z = 1 + it$ と置くと $\int_{II} f(z)dz = \int_0^1 (a + b(1 + it))idt = (a + b)i - \frac{b}{2}$
- III 上の積分: $z = 1 - t + i$ と置くと $\int_{III} f(z)dz = \int_0^1 (a + b(1 + i - t))(-dt) = -a - (1 + i)b + \frac{b}{2}$
- IV 上の積分: $z = i(1 - t)$ と置くと $\int_{IV} f(z)dz = \int_0^1 (a + bi(1 - t))dt = -ia + b - \frac{b}{2}$

全部足すと $\int_{I+II+III+IV} f(z)dz = 0$. (ゼロになったのは偶然ではない)

積分路の合成、逆

- 積分路 C_1 の終点が C_2 の始点であるとする $C_1 + C_2$ は合成された積分路とみなすこともできる。このとき

$$\int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz = \int_{C_1+C_2} f(z)dz$$

- 積分路 C の終点から始点まで C を逆に辿った道を $-C$ と書くことにする。このとき

$$\int_{-C} f(z)dz = - \int_C f(z)dz$$

3.3 Cauchy の積分定理

Cauchy の積分定理 複素関数 $f(z)$ が閉じた積分路 C 及びその内部で正則であれば

$$\oint_C dz f(z) = 0$$

(閉じた積分路上の積分を \oint と書く。)

証明 Green の定理

$$\oint_C (P(x, y)dx + Q(x, y)dy) = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

(C は閉じた積分路、積分の向きは反時計回り、 R は積分路の内部) を用いると、

$$\oint_C (u + iv)(dx + idy) = \iint_R [i(u_x + iv_x) - (u_y + iv_y)] dx dy = 0$$

最後の変形では Cauchy-Riemann の関係式を用いた。

Green の定理の証明： まず長方形の領域上 $(x \in [x_1, x_2], y \in [y_1, y_2])$ の積分で証明する。面積分の被積分関数はそれぞれ x, y の微分になっていることを用いてそれぞれの積分を実行すると

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \int_{y_1}^{y_2} dy (Q(x_2, y) - Q(x_1, y)) - \int_{x_1}^{x_2} dx (P(x, y_2) - P(x, y_1))$$

となる。右辺は左辺の線積分と一致している。より一般に凸閉領域 D に対しては境界を

- $x \in \{x_1, x_2\}$ で $y = f_{\pm}(x)$ ($f_+(x) \geq f_-(x)$)
- $y \in \{y_1, y_2\}$ に対して $x = g_{\pm}(y)$ ($g_+(y) \geq g_-(y)$)

のように表示できる。このとき上記の積分は

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \int_{y_1}^{y_2} dy (Q(f_+(y), y) - Q(f_-(y), y)) - \int_{x_1}^{x_2} dx (P(x, g_+(x)) - P(x, g_-(x)))$$

となるが右辺の積分は周回積分の定義に他ならない。一般の場合には全体の領域を凸領域に分解し、面積積分を各領域に実行し、足し上げる。その時、線積分側では重なる積分路が現れるが必ず逆向きに積分されるので重なっている部分は全てキャンセルし、全体を囲う経路 C に沿った積分に帰着する。一方、右辺は閉曲面で囲われた面積要素のたしあげ＝二次元積分となる。□

Green の定理は様々な次元に拡張される。一例としてはベクトル解析に現れる Stokes の定理

$$\int_S \vec{v}(x, y, z) d\vec{S} = \int_V \text{div}(\vec{v}) d^3x$$

があげられる。最も一般的には微分形式を用いた表式

$$\int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega$$

(ω は p 形式、 D は $p+1$ 次元体積、 ∂D は D の p 次元の境界、 $d\omega$ は p 形式の外微分)。これらは物理学 III で説明される。

Cauchy の積分定理の応用： C_1, C_2 を始点と終点を共有する積分路、道 $C_1 - C_2$ で囲われた領域で被積分関数 $f(z)$ が正則であるものとする

$$\int_{C_1} f(z) dz - \int_{C_2} f(z) dz = \oint_{C_1 - C_2} f(z) dz = 0.$$

つまり

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz$$

始点と終点と同じ道で内部で $f(z)$ が正則であれば積分値は積分路によらない。

3.4 Cauchy-Goursat の定理

$f(z)$ が積分路 C 、およびその内部 R で正則ならば任意の $a \in R$ に対して

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz &= f(a) \quad (\text{Cauchy}) \\ \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz &= \frac{d^n f(a)}{da^n} \quad (\text{Goursat})\end{aligned}$$

[証明] C_ϵ を a を中心にした半径 ϵ の円、積分路 I を C 上の一点から C_ϵ 上の一点を結ぶ曲線とする。積分路 $C + I - C_\epsilon - I$ は閉じた道をつくりその内部で $f(z)/(z-a)$ は正則なので

$$\begin{aligned}0 &= \oint_{C+I-C_\epsilon-I} dz \frac{f(z)}{z-a} \\ &= \oint_C dz \frac{f(z)}{z-a} + \int_I dz \frac{f(z)}{z-a} - \oint_{C_\epsilon} dz \frac{f(z)}{z-a} - \int_I dz \frac{f(z)}{z-a} \\ &= \oint_C dz \frac{f(z)}{z-a} - \oint_{C_\epsilon} dz \frac{f(z)}{z-a}\end{aligned}$$

つまり $\oint_C dz \frac{f(z)}{z-a} = \oint_{C_\epsilon} dz \frac{f(z)}{z-a}$ 。 C_ϵ を $z = a + \epsilon e^{2\pi i t}$ とパラメータ表示すると $f(z) = f(a) + (z-a)f'(a) + O(\epsilon^2)$ となるので

$$\oint_{C_\epsilon} \frac{f(z)}{z-a} dz = f(a) \oint_{C_\epsilon} \frac{dz}{z-a} + f'(a) \oint_{C_\epsilon} dz + O(\epsilon) = 2\pi i f(a) + O(\epsilon)$$

最後の式の第二項は $\epsilon \rightarrow 0$ で無視できる。

さらに Cauchy の公式の両辺をパラメータ a で n 回微分すると Goursat の公式となる。 \square

3.5 Taylor 展開と Laurent 展開

3.5.1 Taylor 展開

$z = a$ ($a \in C$) の近傍で一価正則な関数 $f(z)$ は $(z-a)$ のべき級数として展開可能である。

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n$$

これを Taylor 展開と呼ぶ。このべき級数の収束半径は a と a から最も近い $f(z)$ の特異点までの距離に等しい。

証明: $f(z)$ が a を中心とする半径 r の円 C とその内部で正則だと仮定すると $|h| < r$ となる $h \in \mathbb{C}$ に対して Cauchy の定理により

$$f(a+h) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a-h} dz$$

ここで展開

$$\frac{1}{z-a-h} = \frac{1}{z-a} + \frac{h}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{h^n}{(z-a)^{n+1}} + \frac{h^{n+1}}{(z-a)^{n+1}(z-a-h)}$$

を右辺に代入。Cauchy-Goursat の公式を用いると

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + f'(a)h + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + Q_n \\ Q_n &= \frac{h^{n+1}}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}(z-a-h)} dz \end{aligned}$$

被積分関数 $\frac{f(z)}{2\pi i(z-a-h)}$ は C 上で正則なので絶対値 $|\frac{f(z)}{2\pi i(z-a-h)}|$ は C 上で有限上の最大値 M を持つので積分は以下のように上限を持つ。

$$|Q_n| \leq |h|^{n+1} \oint |dz| \frac{M}{|z-a|^{n+1}} \leq (2\pi M r) \left| \frac{h}{r} \right|^{n+1}$$

ここで左辺の $2\pi r$ は積分路の長さ。 $|h| < r$ である限り $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = 0$ 。この r は $f(z)$ が C が特異点に出会うまで大きくすることが可能。つまり、その内部で一様かつ絶対収束する。 \square

3.5.2 Laurent 展開

関数 $f(z)$ が $z = a$ を中心とする半径 r_1, r_2 ($r_1 < r_2$) の円 C_1, C_2 の間に挟まれた円環領域 D で正則である時、次のような展開が可能である。

$$\begin{aligned} f(a+h) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n h^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n h^{-n}, \\ a_n &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz, \\ b_n &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} (z-a)^{n-1} f(z) dz \end{aligned} \tag{3.1}$$

(3.1) の第 1 項は C_2 の内部で絶対収束し、第 2 項は C_1 の外部で絶対収束する。

証明: Cauchy の定理により

$$f(a+h) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2-C_1} dz \frac{f(z)}{z-a-h} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} dz \frac{f(z)}{z-a-h} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} dz \frac{f(z)}{z-a-h}$$

C_2 上では

$$\frac{1}{z-a-h} = \frac{1}{z-a} \frac{1}{1-\frac{h}{z-a}} = \frac{1}{z-a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{h}{z-a}\right)^n$$

のように被積分関数は一様かつ絶対収束する級数でかけるので項別積分することができて

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(z)}{z-a-h} dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n h^n, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

となる。同様に C_1 上では

$$\frac{-1}{z-a-h} = \frac{1}{h} \frac{1}{1-\frac{z-a}{h}} = \frac{1}{h} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{h}\right)^n$$

のように項別積分して

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z-a-h} dz = \sum_{n=1}^{\infty} b_n h^{-n}, \quad b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} f(z)(z-a)^{n-1} dz$$

となる。□

3.5.3 例

- $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$ 。2つの領域 (i) $0 < |z| < 1$, (ii) $1 < |z|$ で Laurent 展開可能。領域 (i) では

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

領域 (ii) では

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z} \frac{1}{1-(1/z)} = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{z^n}$$

- $f(z) = e^{1/z}$ 。領域 $|z| > 0$ で Laurent 展開可能。

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n}$$

- $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ ，領域 (i) $|z| < 1$, (ii) $1 < |z| < 2$, (iii) $|z| > 2$ でそれぞれ Laurent 展開可能。
(練習問題としてやってみよ)

第4章 複素関数の大局構造

4.1 特異点の分類

z のみに依存する関数 $f(z)$ が $z = a$ で特異点は次の3つに分類できる。

- 極 (pole):
 - $f(z)$ は a を覗いた a の近傍で正則
 - $f(z)$ は $z = a$ の周りで以下のように Laurent 展開できる。

$$f(z) = \sum_{r=1}^n \frac{b_r}{(z-a)^r} + \phi(z)$$

ここで n は有限な正の整数、 $\phi(z)$ は $z = a$ の近傍で正則な関数。

以上の条件をみたすとき $f(z)$ は点 $z = a$ に n 位の極 (pole) を持つという。また b_1 を $f(z)$ の極 $z = a$ における留数 (residue) と呼び、 $\text{Res}_{z=a} f(z)$ と書く。また負べきの部分 $\sum_{r=1}^n \frac{b_r}{(z-a)^r}$ を $f(z)$ の $z = a$ における主要部と呼ぶ。

- 真性特異点 (essential singularity) Laurent 展開が負べきについて (つまり主要部が) 無限和になる場合。(例) $f(z) = e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n}$ など
- 除去可能な特異点: その点では関数の値は不定になるが特定の値に設定するとその点で正則にできる場合。(例) $f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$ 。 $z = 0$ では不定であるが $f(0) = 1$ と定義すると正則になり $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!}$ のように Taylor 展開できる。また級数で定義されるゼータ関数 $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ は $z = 0, -1, -2, -3, \dots$ で発散するが解析接続により有限の値を定義することができ、除去可能な特異点となる。(後述)

注意: 特異点ではないが、 $f(z) = (z-a)^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ ($r \in \mathbb{Z}_{>0}$) のように展開できるとき、 $z = a$ を関数 $f(z)$ の r 位のゼロ点であると呼ぶ。

4.1.1 Weierstrass の定理

真性特異点については以下の定理が知られている。

定理 (Weierstrass): $z = a$ が $f(z)$ の真性特異点とすると、任意の複素数 c に対して a に収束する複素数列 $\{z_n\}$ が存在して $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = c$ のようにできる。

証明: c_0 という値を取れないとすると $g(z) = \frac{1}{f(z) - c_0}$ は $z = a$ で正則となるはずであり $g(z) = (z - a)^n \varphi(z)$ ($\varphi(z)$ は $z = a$ で正則、かつ $\varphi(a) \neq 0$). このとき $f(z) = c_0 + (z - a)^{-n} \frac{1}{\varphi(z)}$ と書けるがこれは $f(z)$ が $z = a$ で n 位の極を持つことを意味しており、真性特異点を持つことと矛盾する。

□

4.1.2 無限遠点の取り扱い

複素平面において $|z| \rightarrow \infty$ となる点は無限個あるが、全体をまとめて「無限遠点」($z = \infty$) という一つの点として取り扱う方が便利な場合が多い。例えば $w = 1/z$ という複素数の写像を用いると $z = \infty$ は $w = 0$ という一点に写像され、一対一対応するので便利である。無限遠点に於ける正則性、特異性などは以下のように定義される。関数 $f(z)$ を $w = 1/z$ を用いて $g(w) = f(1/w)$ のように書き換える。変数 w では無限遠点は $w = 0$ なので、 $f(z)$ が $z = \infty$ で n 位の極を持つとは

$$g(w) = A_{-n}w^{-n} + A_{-n+1}w^{-n+1} + \cdots + A_{-1}w^{-1} + \varphi(w)$$

のように展開できることを意味する。 $(\varphi(w)$ は $w = 0$ で正則な関数。 $A_{-n} \neq 0$) 同様に $g(w)$ の $w = 0$ における主要部が無限和の場合には $z = \infty$ が真性特異点になる。(例: $f(z) = e^z$)

4.2 Liouville の定理と正則関数の大局的構造

定義 (整関数=entire function): 無限遠点以外の全複素平面で正則な関数 $f(z)$ を、整関数と呼ぶ。
例としては

- 指数関数 e^z , 三角関数 $\sin(z), \cos(z)$ など
- 多項式: $f(z) = \sum_{r=0}^n a_r z^r$

Liouville の定理

整関数 $f(z)$ が無限遠点でも有限である場合 $f(z)$ は定数関数である。

証明

複素平面上の任意の点で $|f(z)| < K$ ($K > 0$ は有限の実数) と仮定できる。この時複素平面上の任意の 2 点 z, z' に対して 2 点を含む半径 R の円 C を積分路に対して Cauchy の積分定理により

$$f(z') - f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C d\zeta f(\zeta) \left(\frac{1}{\zeta - z'} - \frac{1}{\zeta - z} \right) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C d\zeta f(\zeta) \frac{z' - z}{(\zeta - z)(\zeta - z')}$$

このとき $R \rightarrow \infty$ とすると被積分関数の絶対値は $O(R^{-2})$, 積分路の長さは $O(R)$ なので $R \rightarrow \infty$ で積分はゼロに収束。すなわち $f(z') - f(z) = 0$ となる。 \square

定理

無限遠点も含めて真性特異点がない関数は有理関数である。すなわち $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, ただし $p(z)$ と $q(z)$ は多項式、となる。

証明

$f(z)$ の極の集合を $\{c_\ell\}$ ($\ell = 1, \dots, k$) とする。また無限遠点にも極があるとすると $f(z)$ は以下のような形で書けるはずである。

$$f(z) = \sum_{\ell=1}^k \sum_{s=1}^{n_\ell} \frac{A_{s,\ell}}{(z - c_\ell)^s} + \sum_{\ell=1}^n a_\ell z^\ell + \varphi(z)$$

ここで n_ℓ は $z = c_\ell$ における極の位数、 n は無限遠点における極の位数、 $\varphi(z)$ は複素平面上どこにも極を持たない正則関数である。この時 Liouville の定理により $\varphi(z)$ は定数関数となり、上記の和は有理関数の形に書ける。 \square

4.3 解析接続

これまで見てきたように複素関数は級数展開の方法により収束領域が異なっている。例えば、 $f(z) = \frac{1}{1-z}$ という関数を例に上げると、 $z = 0$ の周りのべき級数展開 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ は $|z| < 1$ という円形領域で定義できるが、別の点、例えば $z = i$ の周りで級数展開することも可能であり $f(z) = \frac{1}{1-i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-i)^n} (z-i)^n$ のように展開されこの場合の定義域は $|z-i| < \sqrt{2}$ 。

また、後で扱うガンマ関数などでは複素積分や無限積による定義も可能であり、同様に収束領域がそれぞれ異なる。

これらの定義法では一般に関数の定義域は限定される。すなわち、べき級数や無限積の場合はそれらが収束する領域、また積分を用いる場合でも積分が収束するのはパラメータ空間の一部である。

定義：解析接続 2つの複素関数 $f_1(z)$, $f_2(z)$ がそれぞれ複素平面の領域 D_1 , D_2 で正則で集積点を含む共通領域 $D_1 \cap D_2 (\neq \emptyset)$ で $f_1(z) = f_2(z)$ である場合、 $f_1(z)$ は $f_2(z)$ の解析接続という。

例: $(1-z)^{-1}$ の2つの展開 $f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ($D_1 = \{z \mid |z| < 1\}$), と $f(z) = \frac{1}{1-i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-i)^n} (z-i)^n$ ($D_2 = \{z \mid |z-i| < \sqrt{2}\}$) は共通する収束領域を持っており、共通する領域で等しいので互いに解析接続になっている。

一致の定理:

複素平面上的の連結開領域 D 上で定義された2つの正則関数、 $f_1(z), f_2(z)$ が D で集積点をもつ D の部分集合上で $f_1(z) = f_2(z)$ であれば D 全体で $f_1(z) = f_2(z)$ となる。

この定理により D_1 で定義される $f_1(z)$ と D_2 で定義される $f_2(z)$ が解析接続で関係づけられている場合 $D_1 \cup D_2$ 全体で同一の関数と見なすことができる。

一般に解析接続を続けて行うことにより、複素関数の定義域を大幅に広げることが可能である。上で例として用いた $\frac{1}{1-z}$ の場合には級数展開をつなげることにより、もともとの有理関数の定義域である $\mathbb{C}/\{z=1\}$ に関数の定義域を拡大できる。

点 $z = z_1$ の周囲で定義される正則関数 $f(z)$ を別の点 $z = z_2$ に解析接続するためには z_1 と z_2 を結ぶ曲線 C を一つ選び C 上の点の周辺で定義される展開をつなぐことにより解析接続が定義される。一般に連続変形により互いに関連付けられる二つの曲線 C_1 と C_2 で定義される解析接続は一致の定理により同じ関数を与える。一方、 C_1 と C_2 が連続変形で得られない場合は注意が必要である。例えば $f(z) = z^{1/2}$ を $z = 1$ から $z = -1$ まで解析接続する道は時計回りの曲線と反時計回りの曲線の二種類定義できるが、互いに符号が逆の定義を与え、値が一致しない。多値関数に対する解析接続は複素平面ではなく次の節で述べるリーマン面上で一意的な関数の定義を与える。

4.4 多価関数とリーマン面

今まで扱ってきた関数 z^n, e^z などは z を決めると関数の値が一意的に決まる関数であり「一価関数」と呼ばれる。

一方 z を決めても $f(z)$ が一意的に決まらない関数もある。

例1: $f(z) = z^{1/n}$ ($n = 2, 3, 4, \dots$)。 $(f(z))^n = z = re^{i\theta}$ を用いると z の n 乗根は $f(z) = \omega^p (r)^{1/n} e^{i\theta/n}$, ($\omega = e^{2\pi i/n}, p = 0, 1, \dots, n-1$ となり、 n 個の異なる値を取りうる。このような関数を多価関数(今の場合は n 価関数)と呼ぶ。

例2: $f(z) = \ln(z)$ 。逆関数は $e^{f(z)} = z = re^{i\theta} = e^{\ln r + i\theta}$ 。右辺の θ を 2π ずらしても $e^{2\pi i} = \cos(2\pi) + i \sin(2\pi) = 1$ なので値がずれないことに注意すると、

$$f(z) = \ln z = \ln r + i(\theta + 2\pi n), \quad n \in \mathbb{Z}$$

つまり $\ln z$ は無限個の値を持ちうる多価関数である。

このような多価性を避けて関数を 1 価にするにはナイーブにはどれか一つの値を定義として与えれば良いように思われる。例えば、

$$z^{1/n} = r^{1/n} e^{2\pi i \theta/n}, \quad \ln(z) = \ln r + i\theta$$

しかし、これらの定義を用いると複素平面で原点の周りに一周 $z(\theta) = z e^{i\theta}$ ($\theta = 0 \rightarrow 2\pi$) を行ったときに複素平面上では同じ点に戻っているはずなのに関数の方は連続性を保とうとすると別の値に行く。 $z^{1/n} \rightarrow z^{1/n} \omega$, $\ln z \rightarrow \ln z + 2\pi i$ 。したがって複素平面上の連続性を保とうとすると上記の定義は矛盾を起こす。この問題を回避する方法は 2 つあって、

- Cut (切断) の挿入
- Riemann 面の導入

4.4.1 Cut

上記の問題は関数が定義されている複素平面で一価性を破るような操作を定義できてしまうことが問題であると考え、複素平面を切断して原点の周りで一周する操作を禁止してしまえば良い。例えば、 $z^{1/n}$, $\ln z$ では実軸上 $[0, \infty)$, あるいは $(-\infty, 0]$ を切断し、切断線の上下での連続性をなくしてしまえば矛盾が起こらなくなる。Cut の入れ方には任意性があることに注意する。

より一般の多価関数の場合には Cut の入れ方がより複雑になる。例えば $f(z) = z^{1/2}(1-z)^{1/2}$ の場合は実軸上 $[0, 1]$ の線分、 $f(z) = z^{1/2}(1-z)^{1/2}(2-z)^{1/2}$ の場合は実軸上 $[0, 1], [2, \infty)$, または $(-\infty, 0], [1, 2]$ などのように 2 箇所 cut を入れる必要がある。一般には Cut は多価性が生じる点を 2 点ずつ互いに交わらないように結べば良い。 ∞ でも多価性が生じうることに注意する。

4.4.2 Riemann 面

Cut の考え方は簡明であるが問題点もある。例えば後で出てくるベータ関数は次のような積分表示で定義される。(比例定数は省いてある)

$$B(p, q) \sim \int dz z^{p-1} (1-z)^{q-1} \quad (4.1)$$

この時積分路を積分がゼロにならないような閉じた積分路を取る必要があるが、多価性を持つ点の周りを回らなくては行けないので Cut を入れた複素平面では定義できない。

Riemann 面とは Cut を入れた複素平面を何枚か貼り合わせて、構成された面上で多価関数を 1 価にするように構成されたものである。具体的に考えるために $f(z) = z^{1/2}$ を考える。この場合 2 価関数なので $(-\infty, 0]$ に cut を入れた複素平面を 2 枚 (それぞれ Σ_1, Σ_2 とする) 用意する。 Σ_1 の cut の上下を A_1, B_1 , Σ_2 の cut の上下を A_2, B_2 と書いたとき A_1 と B_2 , B_1 と A_2 をそれぞれ貼り付ける。つまり Σ_1 で cut 近傍上側の点を cut を通過させて下側に行くと Σ_2 の点とみなす。このように 2 枚の複素平面を貼り付けたものを Riemann 面 Σ と書く。 $z = re^{i\theta}$ ($-\pi < \theta < \pi$) と書いたとき、 $z^{1/2}$ を Riemann 面 Σ 上で以下のように定義する。

$$z^{1/2} = \begin{cases} r^{1/2}e^{i\theta/2} & z \in \Sigma_1 \\ -r^{1/2}e^{i\theta/2} & z \in \Sigma_2 \end{cases}$$

この関数は接合により Σ 上で連続、かつ 1 価になっている。($A_1 \rightarrow B_2$ に連続的に z が動くときに $z^{1/2}$ の値が連続的に変化することを確認せよ。)

Riemann 面は考えている多価関数により変化する。例えば $z^{1/3}$ に対する Riemann 面は cut 入りの複素平面 3 枚をつなげたもの、 $\ln z$ に対するものは無限枚の複素平面が必要である。

より複雑な多価関数の場合には Riemann 面は更に複雑になる。例えば $\sqrt{z(z-1)(z-2)}$ に対する Riemann 面 Σ は 2 枚の複素平面 Σ_1, Σ_2 の $[0, 1], [2, \infty)$ に cut を 2 つずつ入れ対応する切片を互い違いに貼り合わせたものであるが、 Σ は位相的に 2 次元トーラスとおなじになる。(講義では図を用いて説明する)

4.4.3 多価関数の複素積分

多価関数の積分経路、特に閉じた積分経路については注意が必要である。例えば、 $z^{1/2}$ を単位円上で積分することを考えると、cut を実軸上 $(-\infty, 0]$ に入れ、積分を $z(t) = e^{it}$, ($t \in [-\pi, \pi]$) で定義すると

$$\oint dz z^{1/2} = \int_{-\pi}^{\pi} dt \frac{dz}{dt} z^{1/2} = \int_{-\pi}^{\pi} dt \frac{de^{it}}{dt} e^{it/2} = i \left(\frac{2}{3i} e^{3it/2} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{4}{3}i$$

となり一見閉曲線上の積分に見えるがゼロにならない。

実際には、上で解説したように多価関数を Riemann 面の概念を導入して 1 価関数に再定義する必要がある。上の例の場合は原点周りに一周すると別の複素平面 (例えば $\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ に移行している) で始点と終点は同じ点ではないということになる。Riemann 面の意味で同じ点に戻ろうとすると原点周りに 2 周する必要があり、その場合の積分は

$$\int_{-\pi}^{3\pi} dt \frac{dz}{dt} z^{1/2} = \int_{-\pi}^{3\pi} dt \frac{de^{it}}{dt} e^{it/2} = i \left(\frac{2}{3i} e^{3it/2} \right) \Big|_{-\pi}^{3\pi} = 0$$

すなわち Cauchy の定理が成立する。

リーマン面上ではその上で正則な座標を用いると見通しが良くなる。関数 $z^{1/2}$ の場合は $w = z^{1/2}$ という座標を用いるとリーマン面上で一価となる。上記の積分は $|w| = 1$ 上の積分であり、

$$\oint_{\text{twice}} dz z^{1/2} = 2 \oint_{\text{once}} w^2 dw = 0$$

となり自明にゼロになる積分となる。ここでは $z = w^2$ より $dz = 2w dw$ を用いた。この計算における周回積分は w についてのもので z に対しては二周することに注意。

より自明でない例としてベータ関数 (4.1) の例を取り上げよう。ゼロでない値を出すような閉じた積分路を工夫してみる。Cut は実軸上 $[0, 1]$ に置くのが最も簡単である。 p, q を一般の複素数とすると貼り合わせるべき複素平面は無限枚必要だということがわかる。原点の周り時計回り (反時計回り) の積分路を $P_0^-(P_0^+)$, $z = 1$ 周り時計回り (反時計回り) の積分路を $P_1^-(P_1^+)$ と書くことにする。 $P_0^\pm(P_1^\pm)$ に沿って被積分関数の引数を移動させたときに得られる位相因子はそれぞれ $e^{\pm 2\pi i p}$ ($e^{\pm 2\pi i q}$) であることに注意すると $P_0^+ \rightarrow P_1^- \rightarrow P_0^- \rightarrow P_1^+$ のような順番で積分路を構成すると位相因子がキャンセルして同じ複素平面に戻ることがわかる。この積分路を C を用いてベータ関数は定義できる。なお、積分がゼロにならない積分路は他にもいろいろなチョイスがあるが、 $P_0^+ \rightarrow P_0^-$ のような順番で積分路を取ると積分路自体が自明なものとなり積分への寄与もゼロになることに注意する。

第5章 留数積分

5.1 留数定理

$f(z)$ が積分路 C の内側に極 $(z_i, i = 1, \dots, m)$ のみを持つとする。この時

$$\oint_C \frac{dz}{2\pi i} f(z) = \sum_{i=1}^m R_i$$

ここで $R_i = \text{Res}_{z=z_i} f(z)$ 。 ($f(z)$ の $z = z_i$ における留数。)

証明

積分路を変更して $\oint_C = \sum_{i=1}^m \oint_{C_i}$ 、ただし C_i は z_i を囲み他の極を含まない小さな円、とできる。 C_i の内部では $f(z) = \sum_{r=1}^{n_i} \frac{b_{ir}}{(z-z_i)^r} + \varphi_i(z)$ と展開可能 ($\varphi_i(z)$ は C_i の内部で正則)。この時 C_i 上の積分を $z - z_i = \rho_i e^{i\theta}$ と置いて実行すると

$$\oint_{C_i} \frac{dz}{2\pi i} \frac{1}{(z-z_i)^r} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho_i^{-r+1} e^{i(-r+1)\theta} d\theta = \begin{cases} 1 & r = 1 \\ 0 & r \neq 1 \end{cases}$$

これから $\oint_{C_i} \frac{dz}{2\pi i} f(z) = b_{i1} = \text{Res}_{z=z_i} f(z) = R_i$ 、すなわち $\oint \frac{dz}{2\pi i} f(z) = \sum_i R_i$ □

高次の極における留数の求め方 : 正則関数 $f(z)$ が点 $z = a$ において $k > 0$ 次の極を持つとき $z = a$ の周りでのローラン展開は

$$f(z) = \frac{A_k}{(z-a)^k} + \dots + \frac{A_1}{z-a} + (z=a \text{ で正則な関数})$$

で与えられ、 A_1 が留数を与える。 A_1 を求めるためには

$$(z-a)^k f(z) = A_k + \dots + A_1(z-a)^{k-1} + (\text{高次の項})$$

に注意すると、

$$A_1 = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \left(\frac{d}{dz} \right)^{k-1} ((z-a)^k f(z))$$

となる。

例 : $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}$ は $z = \pm i$ で二次の極を持つが、その点における留数は $k = 2$ を代入して

$$\lim_{a \rightarrow \pm i} \frac{d}{dz} ((z \mp i)^2 \frac{1}{(z^2+1)^2}) = \lim_{a \rightarrow \pm i} \frac{d}{dz} (z \pm i)^{-2} = \mp \frac{i}{4}$$

5.2 三角関数の一周積分

次の形の積分を考える。

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta R(\cos \theta, \sin \theta)$$

この積分は $z = e^{i\theta}$ と置くと $\cos \theta = \frac{z+z^{-1}}{2}$, $\sin \theta = \frac{z-z^{-1}}{2i}$ により閉積分路の複素積分に書き換えられる。

$$I = \oint_C R\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right) \frac{dz}{iz}$$

ここで C は半径 1 の円上の積分路である。関数 $R(x)$ が有理式の場合、積分は留数積分に帰着する。

例: $0 < p < 1$ に対して $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2p\cos\theta+p^2}$

上記の置き換えを行うと

$$I = \oint_C \frac{dz}{iz} \frac{1}{1-2p\frac{z+z^{-1}}{2}+p^2} = i \oint_C \frac{dz}{pz^2 - (p^2+1)z + p} = i \oint_C \frac{dz}{(pz-1)(z-p)}$$

円 $|z|=1$ の内部の極は $z=p$ でその点での留数は $\text{Res}_{z=p} \frac{i}{(pz-1)(z-p)} = \frac{i}{p^2-1}$ 。したがって留数積分により

$$I = (2\pi i) \frac{i}{p^2-1} = \frac{2\pi}{1-p^2}$$

5.3 実軸上の積分

実軸上の積分は閉じた積分路ではないが、ゼロになる積分路を余分に追加して閉じた積分区間に変更し留数定理を使用できる例がある。

5.3.1 無限遠の積分路の追加による閉積分路の形成

$Q(z)$ を以下の条件を満たす正則関数とする。

- 上半平面に有限個の極 z_i ($i=1, \dots, n$) を持ちその点における留数を R_i
- $|z| \rightarrow \infty$, $0 \leq \arg(z) \leq \pi$ で $|zQ(z)| \rightarrow 0$ のように一様収束

この時次の積分公式が成立する

$$\int_{-\infty}^{\infty} Q(x)dx = 2\pi i \sum_{j=1}^n R_j$$

証明十分大きな $\rho > 0$ に対して積分路 $C_1 = [-\rho, \rho]$ (実軸上), $C_2 = \rho e^{\pi it}$ (上半平面半径 ρ の円) と定義する。 $C_1 + C_2$ は閉じた積分路を作りその内部に上半面上すべての $Q(z)$ の極を含むとすると、留数定理により

$$\int_{C_1+C_2} dzQ(z) = 2\pi i \sum_{j=1}^n R_j$$

となる。一方

$$\left| \int_{C_2} dzQ(z) \right| \leq \int_0^1 dt |\pi \rho Q(\rho e^{\pi it})| \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} 0$$

$$\int_{C_1} dzQ(z) \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} Q(x)dx$$

となるので

$$\int_{C_1+C_2} dzQ(z) \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} Q(x)dx$$

応用例

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

被積分関数の上半面における極は $z = i$ のみ。その点における関数の振る舞いは

$$\frac{1}{(1+z^2)^2} = -\frac{1}{4(z-i)^2} - \frac{i}{4(z-i)} + O(1)$$

つまり $z = i$ における留数は $-i/4$ となる。¹一方 $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \left| \frac{\rho e^{i\pi t}}{(1+\rho e^{i\pi t})^2} \right| = 0$ となるので被積分関数は条件を満たす。これから以下の公式が導ける。

$$I = 2\pi i(-i/4) = \frac{\pi}{2}$$

5.3.2 指数関数を含む場合：Jordanの補題

同じく $(-\infty, \infty)$ 積分、被積分関数は $Q(x) = e^{i\alpha x} p(x)$ の形で

¹二次の極における留数公式により

$$\frac{d}{dz} \left((z-i)^2 \frac{1}{(1+z^2)^2} \right) \Big|_{z=i} = \frac{-i}{4}$$

と計算しても良い。

- $\alpha > 0$
- 上半平面円周上 $|z| \rightarrow \infty$ で $|p(z)| \rightarrow 0$ (一様収束)
- $Q(z)$ は上半平面上有限個の極 z_i ($i = 1, \dots, n$) を除いて正則。 z_i における留数を R_i とする。

以上の条件のもとで

$$\int_{-\infty}^{\infty} Q(x)dx = 2\pi i \sum_i R_i$$

注意 : $\alpha < 0$ の場合は積分を収束させるためには下半平面の円周上の積分を行う必要がある。収束するための $p(z)$ に対する条件は同じ、留数の和は積分路が時計回りになるため

$$\int_{-\infty}^{\infty} Q(x)dx = -2\pi i \sum_i R_i$$

のように変更する。ここで R_i は下半平面内の極の留数。

証明

基本的に 5.3.1 の積分と同じなので円周 C_2 における積分が $\rho \rightarrow \infty$ でゼロに収束することを示せば良い。 C_2 で積分変数を $z = \rho e^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) のように書き、積分区間を $[0, \delta]$, $[\delta, \pi - \delta]$, $[\pi - \delta, \pi]$ の3つの区間に分けそれぞれに対する積分路を $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \bar{C}_3$ と書く。 $C_2 = \bar{C}_1 + \bar{C}_2 + \bar{C}_3$ 。 $\delta > 0$ は $\pi/2$ より小さければなんでも良い。証明は δ の値にはよらない。積分区間 C_2 における積分の収束性を Jordan の補題 と呼ぶ。

$i\alpha z = \alpha\rho(-\sin\theta + i\cos\theta)$ なので $|e^{i\alpha z}| = e^{-\alpha\rho\sin\theta}$ であることに注意する。 C_2 積分は

$$\left| \int_{C_2} dz e^{i\alpha z} p(z) \right| < \int_{\delta}^{\pi-\delta} \rho e^{-\alpha\rho\sin\theta} |p(\rho e^{i\theta})| d\theta$$

ここで

$$\rho e^{-\alpha\rho\sin\theta} < \rho e^{-\alpha\rho\sin\delta} \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} 0, \quad \lim_{\rho \rightarrow \infty} |p(\rho e^{i\theta})| = 0$$

なので \bar{C}_2 積分は0に収束する。

\bar{C}_1 積分では不等式 $\sin\theta \geq 2\theta/\pi$ ($0 \leq \theta < \pi/2$) を用いる。

$$\left| \int_{\bar{C}_1} e^{i\alpha z} p(z) dz \right| < \int_0^{\pi/2} e^{-2\alpha\rho\theta/\pi} |p(z)| \rho d\theta$$

$|p(z)|$ は一様収束なので、 $\forall \epsilon, \exists \rho$ s.t. $|p(z)| < \epsilon$ とできる。したがって第二項はこの ρ に対して $\epsilon \int_0^{\pi/2} e^{-2\alpha\rho\theta/\pi} d\theta = \epsilon\rho(A/\rho) = A\epsilon$ ($A = \frac{\pi}{2\alpha}(1 - e^{-\alpha\rho})$)。 $\rho \rightarrow \infty$ で A は定数に近づくので積分は $A\epsilon$ で抑えられ、 $\epsilon \rightarrow 0$ ($\rho \rightarrow \infty$) ではゼロとなる。 \bar{C}_3 における収束性も同様に証明される。 \square

応用例

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

証明

ρ を非常に大きな正の実数、 $\epsilon > 0$ を小さな実数として4つの積分路を以下のように定義する。
 $C_- : (-\rho, -\epsilon)$ (実軸上), $C_+ : (\epsilon, \rho)$, $C_\epsilon : z(\theta) = \epsilon e^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq \pi$), $C_\rho : z(\theta) = \rho e^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq \pi$).
 $C_- - C_\epsilon + C_+ + C_\rho$ は閉じた積分路となる。この積分路で $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ を積分する。

$\alpha = 1, p(z) = 1/z$ と置くと $f(z)$ は条件を満たしているのでこのセクションの積分法を用いることができる。まず閉じた積分路 $C_- - C_\epsilon + C_+ + C_\rho$ の内部に $f(z)$ は極を持たないので $\int_{C_- - C_\epsilon + C_+ + C_\rho} f(z) dz = 0$ 。他の区間の積分は

$$\begin{aligned} \int_{C_+ + C_-} f(z) dz &= \int_\epsilon^\rho \frac{e^{ix}}{x} dx - \int_{-\epsilon}^{-\rho} \frac{e^{ix}}{x} dx = \int_\epsilon^\rho \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} dx = 2i \int_\epsilon^\rho dx \frac{\sin x}{x} \\ \int_{C_\epsilon} f(z) dz &= \int_0^\pi \frac{e^{i\epsilon e^{i\theta}}}{\epsilon e^{i\theta}} (\epsilon i e^{i\theta}) d\theta = \pi i + O(\epsilon) \end{aligned}$$

以上をまとめると与えられた公式が得られる。 □

5.3.3 多価関数：Cut をまたぐ積分

$$I = \int_0^\infty x^{\alpha-1} Q(x) dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i \alpha}} \sum_i R_i, \quad \alpha \text{ は適当な実数}$$

仮定として

- $Q(x)$ は1価で有限個の極 z_i ($i = 1, \dots, n$) のみを持つ
- $\lim_{z \rightarrow 0} |z^\alpha Q(z)| = \lim_{z \rightarrow \infty} |z^\alpha Q(z)| = 0$ (z の位相によらず一様収束)
- 多価関数 z^α に対して実軸正の方向 $[0, \infty)$ に Cut を入れ複素関数として定義する。位相は $z = x + i\epsilon$ ($x > 0, \epsilon$ は小さな正の実数) に対して $\arg(x + i\epsilon)^\alpha = 0$, すなわち $(x + i\epsilon)^\alpha = x^\alpha$ 。この位相の定義の下、 $R_i = \text{Res}_{z=z_i}(z^\alpha Q(z))$ と定義される。

証明 積分路を以下のように設定する。 $\epsilon > 0$ は小さな実数、 $\rho > 0$ は大きな実数（最後にそれぞれ $0, \infty$ の極限を取る）と設定。

- $C_1: z = x, x \in [\epsilon, \rho]$, カット直上上側 ($\arg z^\alpha = 0, z^\alpha = x^\alpha$)

- C_2 : $z = x, x \in [\epsilon, \rho]$, カット直上下側 ($\arg z^\alpha = 2\pi, z^\alpha = x^\alpha e^{2\pi i\alpha}$)
- C_ϵ : $z = \epsilon e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]$ 原点周り半径 ϵ の円。
- C_ρ : $z = \rho e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]$ 原点周り半径 ρ の円。

$C_1 + C_R - C_2 - C_\epsilon$ は閉曲線を構成することに注意する。この時

$$\begin{aligned} \int_{C_1+C_R-C_2-C_\epsilon} z^\alpha Q(z) dz &= 2\pi i \sum_i R_i \quad (\text{留数積分}) \\ \int_{C_\epsilon} z^\alpha Q(z) dz &\rightarrow 0 \quad \epsilon \rightarrow 0 \quad (\text{極限の定義より}) \\ \int_{C_\rho} z^\alpha Q(z) dz &\rightarrow 0 \quad \rho \rightarrow \infty \quad (\text{極限の定義より}) \\ \int_{C_1} z^\alpha Q(z) dz &= \int_\epsilon^\rho x^\alpha Q(x) dx \\ \int_{C_2} z^\alpha Q(z) dz &= e^{2\pi i\alpha} \int_\epsilon^\rho x^\alpha Q(x) dx \end{aligned}$$

以上により $\epsilon \rightarrow 0, \rho \rightarrow \infty$ の極限で

$$(1 - e^{2\pi i\alpha})I = 2\pi i \sum_i R_i$$

となる。 □

例

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} \frac{dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}, \quad (0 < \alpha < 1)$$

証明:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \left| \frac{(\rho e^{i\theta})^\alpha}{1 + \rho e^{i\theta}} \right| = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left| \frac{(\epsilon e^{i\theta})^\alpha}{1 + \epsilon e^{i\theta}} \right| = 0$$

$Q(z) = \frac{1}{1+z}$ なので極は $z = -1 = e^{\pi i}$ 。その点における留数は $\text{Res}_{z=-1} \frac{z^{\alpha-1}}{1+z} = -e^{\pi i\alpha}$ 。公式に代入すると上記の公式を得る。

5.4 ガウス分布の積分

ガウス分布の積分はよく用いられるので以下に公式を与えておく。まず

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{a}{2}x^2} dx = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}, \quad a > 0$$

証明 まず $x' = \sqrt{a/2}x$ と積分変数を書き換えると (左辺) = $\frac{1}{\sqrt{a/2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{-(x')^2}$ 。この積分は以下のように評価される。

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 &= \iint dx dy e^{-x^2-y^2} = \int_0^{\infty} r dr \int_0^{2\pi} d\theta e^{-r^2} \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} \frac{1}{2} d(\eta) e^{-\eta} = \pi \end{aligned}$$

第2項から第3項へは変数変換 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ と $dx dy = r dr d\theta$ を、また1行目から2行目に行くときには変数変換 $\eta = r^2$ を用いている。これから $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ 。□

同様の積分であるが下記の積分 (ガウス分布のフーリエ変換) もよく用いられる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a}{2}x^2 - ikx} dx = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{-\frac{k^2}{2a}}, \quad a > 0$$

証明: 指数関数の方を整理すると $-\frac{a}{2}x^2 - ikx = -\frac{a}{2}(x + \frac{ik}{a})^2 - \frac{k^2}{2a}$ 。 $\eta = x + \frac{ik}{a}$ とかくと左辺 = $e^{-\frac{k^2}{2a}} \int_C d\eta e^{-\frac{a}{2}\eta^2}$ 。ここで C は $x + \frac{ik}{a}$ ($x \in (-\infty, \infty)$) すなわち実軸に平行な積分路。この積分を評価するために以下のような閉じた積分路を考える。十分大きな $R > 0$ に対して

- C_1 : 実軸上 $-R$ から R まで。
- C_2 : 虚軸に平行に $(R, 0)$ から $(R, \frac{ik}{a})$ まで、
- C_3 : 実軸に平行に $(R, \frac{ik}{a})$ から $(-R, \frac{ik}{a})$ まで。
- C_4 : 虚軸に平行に $(-R, \frac{ik}{a})$ から $(-R, 0)$ 。

これらは閉じた積分路を構成するので Cauchy の積分定理が使って $\int_{C_1+C_2+C_3+C_4} dz e^{-\frac{az^2}{2}} = 0$ 。積分路の内部に特異点がないことに注意する。一方 $R \rightarrow \infty$ の極限で

$$\begin{aligned} \int_{C_1} dz e^{-\frac{az^2}{2}} &\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{ax^2}{2}} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \\ \int_{C_3} dz e^{-\frac{az^2}{2}} &\rightarrow - \int_C d\eta e^{-\frac{a}{2}\eta^2} \\ \int_{C_2, C_4} dz e^{-\frac{az^2}{2}} &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

一行目は上記の公式から。3行目は被積分関数が与えられた積分路上で $|e^{-\frac{a(\pm R+ib)^2}{2}}| < M e^{-\frac{aR^2}{2}} \rightarrow 0$ となり、積分区間は有限なのでゼロとなる。これらをまとめると公式が得られる。□

コメント: ガウス分布 $e^{-\frac{ax^2}{2}}$ は $\sqrt{1/a}$ 程度の広がりを持つ。一方そのフーリエ変換はその逆数 \sqrt{a} の広がりを持つ。フーリエ変換は座標 x 表示の波動関数と波数 $k = \frac{p}{\hbar}$ (運動量) 表示の波動関数を関係づけるものであり、上記の関係式は $\Delta x \Delta p \geq \hbar$ という Heisenberg の不確定性原理を表している。

第6章 複素関数の発展的話題

6.1 部分分数展開と無限積展開

Liouville の定理により複素平面上に有限個の極のみを持つ関数は有理関数の形に書けた。

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{\ell=1}^k \sum_{s=1}^{n_\ell} \frac{A_{s,\ell}}{(z - c_\ell)^s} + \sum_{\ell=0}^n a_\ell z^\ell \\ &= \frac{\prod_j (z - w_j)^{s_j}}{\prod_k (z - z_k)^{r_k}} \end{aligned}$$

一行目を部分分数展開、2行目はそれを通分し、因数分解したもので (s_j, r_k は正の整数) ある。

真性特異点が存在する場合も同様の展開 (部分分数展開、積表示) が存在する場合があるが、一般に無限和、無限積が現れるので収束性に注意する必要がある。以下では例えば以下のような公式を導く。

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin(z)} &= \frac{1}{z} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{z + n\pi} \right) = P \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z - n\pi} \\ &= \frac{1}{z} \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{z}{\pi m} \right)^2 \right)^{-1} \end{aligned}$$

一行目の $P \sum$ の P は主値 (Principal value) を意味し、和記号を $P \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N f(n)$ と解釈することを意味する。和の上限・下限を変えて和を取ると (条件収束なので) 和の値が変化してしまうことに注意する。

右辺は任意の z に対して絶対かつ一様に収束する。また、左辺と右辺の差は複素平面全体で極を持たない ($z = n\pi$ における主要部がすべてキャンセルされている) ので、Liouville の定理によれば、定数関数を除いて等しいはず。定数がゼロになることは両辺を $z = 0$ の周りに Laurent 展開したとき $\frac{1}{z} + \frac{z}{6} + O(z^3)$ のように展開されることから理解できる。より厳密な証明については以下を参照すること。

これに類する公式としては次のようなものがあげられる。

$$\frac{1}{\cos z} = P \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z - \frac{2n-1}{2}\pi} = \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{4z^2}{(2n+1)^2\pi^2}\right)^{-1}$$

$$\tan z = -P \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z - \frac{2n-1}{2}\pi}$$

6.1.1 部分分数展開

[定理] $f(z)$ を次の条件を満たす関数とする。

- 有限領域内にある特異点はすべて一位の極。極の位置を a_i ($|a_1| < |a_2| < \dots$ とする) その点における留数を b_i とする。
- 増大する実数列 $0 < R_1 < R_2 < \dots$ が存在し ($\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \infty$), 各 R_i に対して原点を中心とする半径 R_i の円上で $|f(z)| < M$ とする。 (M は i によらない実数。)

この時、 $f(z)$ に対して以下のような部分分数展開が可能である。

$$f(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{1}{z - a_n} + \frac{1}{a_n} \right)$$

証明

x が C_n の内部にあるとすると Cauchy の定理により、(C_n の内部に極 a_1, \dots, a_{N_n} があるとする)

$$\oint_{C_n} \frac{dz}{2\pi i} \frac{f(z)}{z-x} = f(x) + \sum_{r=1}^{N_n} \frac{b_r}{a_r - x} = (A)$$

一方 $\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z} + \frac{x}{z(z-x)}$ を用いると,

$$(A) = f(0) + \sum_{r=1}^{N_n} \frac{b_r}{a_r} + x \oint_{C_n} \frac{dz}{2\pi i} \frac{f(z)}{z(z-x)}$$

第3項は $n \rightarrow \infty$ で

$$\left| \oint \frac{f(z)}{z(z-x)} dz \right| < \left| 2\pi R_n \frac{M}{R_n \frac{1}{2} R_n} \right| = 4\pi \frac{M}{R_n} \rightarrow 0$$

□

例

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=\pm 1, \pm 2, \dots} (-1)^n \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{n\pi} \right) = P \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z - n\pi} \quad (6.1)$$

証明: $f(z) = \frac{1}{\sin z}$ の極は $a_n = \pm\pi in$, ($n \in \mathbb{Z}$) 各点での留数は $\sin(z + n\pi) = (-1)^n \sin(z)$ なので $b_n = (-1)^n$ となる。 $R_n = (n + 1/2)\pi$ と置くと円上で

$$\left| \frac{1}{\sin z} \right| = \left| \frac{2}{e^{iz} - e^{-iz}} \right| < 1$$

となるので条件を満たし、定理を適用できる。 \square

6.1.2 無限積展開

Weierstrass の定理: $f(z)$ を無限遠点以外ではたかだか極しか持たない関数。 a_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) を $f(z)$ のゼロ点、または極の位置。 r_n を点 a_n における極 ($r_n < 0$ の場合) の位数 ($|r_n|$)、あるいはゼロ点の位数 ($r_n > 0$ の場合) とする。この時適当な多項式 $g_n(z)$, 整関数 $G(z)$ が存在して次のような表式が成立する。

$$f(z) = e^{G(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left((1 - z/a_n) e^{g_n(z)} \right)^{r_n}$$

具体的構成

関数 $\frac{f'(z)}{f(z)}$ は $z = a_n$ に一位の極を持ち、その留数は r_n である。この時 $\frac{f'(z)}{f(z)}$ が 6.1.1 節の条件を満たしたとすると

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{f'(0)}{f(0)} + \sum_{n=0}^{\infty} r_n \left(\frac{1}{z - a_n} + \frac{1}{a_n} \right)$$

両辺を積分すると

$$\log f(z) = \text{定数} + \frac{f'(0)}{f(0)} z + \sum_{n=1}^{\infty} \left(r_n \log(1 - z/a_n) + \frac{r_n}{a_n} z \right)$$

両辺を指数関数の方に乗せて

$$f(z) = C e^{\frac{f'(0)z}{f(0)}} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 - \frac{z}{a_n} \right) e^{z/a_n} \right)^{r_n}$$

$G(z) = \text{const} + \frac{f'(0)}{f(0)} z$, $g_n(z) = \frac{z}{a_n}$ と置くと Weierstrass の定理の形になる。

例

$f(z) = \frac{\sin z}{z}$ と置くと $f'(0)/f(0) = 0$ 。 $a_n = \pi n$ にゼロ点を持ちすべて一次である。公式より

$$\frac{\sin z}{z} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 - \frac{z}{\pi n} \right) e^{z/\pi n} \left(1 + \frac{z}{\pi n} \right) e^{-z/\pi n} \right) = \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{(\pi n)^2} \right)$$

6.2 ガンマ関数・ベータ関数・ゼータ関数

6.2.1 ガンマ関数 (Gamma function)

ガンマ関数は階乗 $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ の n を複素変数に一般化したものである。幾つかの同等な定義がある。

積分表示

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (6.2)$$

この定義は $\operatorname{Re}(z) > 0$ の場合に積分が収束し、その領域における $\Gamma(z)$ の定義を与える。ガンマ関数の最もよく用いられる定義はこの表式である。

無限積表示

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= z^{-1} e^{-\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{z/n} \right) \quad (\text{Weierstrass}) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(m-1)! m^z}{(z)_m} = \frac{1}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^z \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} \right) \quad (\text{Euler}) \end{aligned}$$

ここで $\gamma = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^m \frac{1}{n} - \ln m \right) = 0.5772 \cdots$ は Euler-Mascheroni 定数と呼ばれる。積分表示との同等性については後で述べる。

ガンマ関数の性質:

(1) 漸化式: $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$

証明

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt = -e^{-t} t^z \Big|_0^{\infty} + z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z)$$

注意: この漸化式を積分公式に応用すると

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \Gamma(z+1) = \frac{1}{z} \int_0^{\infty} t^z e^{-t} dt$$

最後の表式は $\operatorname{Re}(z) > -1$ で収束する表式で上記のガンマ関数の定義の解析接続を与える。同様に $\Gamma(z) = \frac{1}{z(z+1)} \Gamma(z+2)$ を用いると $\operatorname{Re}(z) > -2$ で有効な表示が得られ、繰り返し同じ考えを適用することによりガンマ関数の全複素平面で有効な解析接続が得られる。なお、無限積表示はすべての z で絶対かつ一様収束するので全複素平面で有効な表示になっている。

(2) $\Gamma(n) = (n-1)!$ (n は正の整数)

証明: $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1$ 。上記の漸化式と組み合わせると $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = \dots = (n-1)!\Gamma(1) = (n-1)!$

(3) $\Gamma(z)$ は $z = 0, -1, -2, \dots$ を除いて正則。 $z = -n$ ($n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) に単純極 (一位の極) を持ち留数は $\frac{(-1)^n}{n!}$

証明: Weierstrass 表示より $z = -n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) 以外に特異点を持たないのは明らか。漸化式を用いると

$$\Gamma(z-n) = \frac{1}{z-n} \Gamma(z-n+1) = \dots = \frac{1}{\prod_{r=0}^{n-1} (z-r)} \Gamma(z+1)$$

ここで $z \sim 0$ と取ると $\Gamma(z-n) \sim \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z} + \text{有限項}$ となる。

(4) 相反公式 (reflection formula): $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$

証明: $\sin(z)$ の無限積展開を用いると

$$\frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} = \frac{1}{(-z)e^{-\gamma z}\Gamma(-z)} \cdot \frac{1}{(z)e^{\gamma z}\Gamma(z)} = \frac{1}{z\Gamma(1-z)\Gamma(z)}$$

(5) $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

証明: 関係式 (4) で $z = 1/2$ と置くと $\Gamma(1/2)^2 = \pi$ 。積分公式により $\Gamma(1/2) > 0$ だから $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ 。

(6) $(a)_n = \Gamma(a+n)/\Gamma(a)$ [証明] 漸化式 (1) を用いて $\Gamma(n+a) = (n-1+a)\Gamma(n-1+a) = \dots = (a)_n\Gamma(a)$

(7) 積公式

$$\prod_{m=0}^{n-1} \Gamma\left(z + \frac{m}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{1}{2}-nz} \Gamma(nz)$$

証明: $\phi(z) = n^{nz-1} \prod_{m=0}^{n-1} \Gamma\left(z + \frac{m}{n}\right) / \Gamma(nz)$ と定義する。Euler の積公式を代入すると $\phi(z)$ の z 依存性はすべてキャンセルし定数であることがわかる。特に $z = 1/n$ と置くと $\Gamma(1) = 1$ を用いて

$$\phi(1/n)^2 = \prod_{r=1}^{n-1} \Gamma(r/n)\Gamma(1-r/n) = \frac{\pi^{n-1}}{\prod_{r=1}^{n-1} \sin(\pi r/n)} = \frac{(2\pi)^{n-1}}{n}$$

応用例: n 次元球面の体積: n 次元球面を実変数 x_1, \dots, x_{n+1} に対して

$$(x_1)^2 + \dots + (x_{n+1})^2 = R^2$$

で定義されるものとする。この空間の体積を $V_n(R) = v_n R^n$ と書く。 v_n を以下のように求める。 $n+1$ 次元ガウス積分を以下のように二通りに評価する。

$$\begin{aligned} \iint_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots dx_{n+1} e^{-\sum_{r=1}^{n+1} (x_r)^2} &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} \right)^{n+1} = (\pi)^{\frac{n+1}{2}} \\ &= \int_0^{\infty} dR V_n(R) e^{-R^2} = \int_0^{\infty} d\eta \frac{v_n}{2} \eta^{\frac{n-1}{2}} e^{-\eta} = \frac{v_n}{2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \end{aligned}$$

これから

$$v_n = \frac{2(\pi)^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

特に $v_1 = 2\pi$, $v_2 = \frac{2(\pi)^{3/2}}{\Gamma(3/2)} = \frac{2(\pi)^{3/2}}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} = 4\pi$ となり半径 1 の円周の長さ、球面の面積と一致。

数学的な補足:

積分による定義と無限積公式の同等性 :

- Euler-Mascheroni 定数の収束性 : $\gamma = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n = \frac{1}{n} - \log\left(\frac{n+1}{n}\right) = \int_0^1 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+t}\right) dt = \int_0^1 \frac{t dt}{n(n+t)} (> 0)$ となることに注意。 $v_n = \frac{1}{n^2}$ と置くと

$$v_n - u_n = \int_0^1 \frac{n - t(n-1)}{n^2(n+t)} dt > 0, \quad u_n > 0$$

となるが $\sum v_n$ は収束するので $\sum u_n$ も収束する。

- Weierstrass 表示の収束性。 $\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} v_n$, $v_n = (1 + z/n)e^{z/n}$ と書かれるので無限積の収束は $\sum_n \log v_n$ の収束性と同等。任意に z を与えたとき十分大きな n に対して $|z/n| < 1/2$ とできるので

$$\log |v_n| = |\log(1 + z/n) - z/n| = \left| \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} z^m}{m n^m} \right| < \frac{|z|^2}{n^2}$$

右辺は収束する数列なので $\sum \log v_n$ も絶対収束する。

- Weierstrass 表示と Euler 表示の同等性。 γ の定義を代入すると

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z \lim_{m \rightarrow \infty} e^{(\sum_{i=1}^m \frac{1}{i} - \ln m)z} \prod_{n=1}^m \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n} = z \lim_{m \rightarrow \infty} m^{-z} \prod_{n=1}^m \left(1 + \frac{z}{n}\right)$$

左辺は Weierstrass 表示、右辺は Euler 表示である。

- 積分表示と Euler 表示の同等性。 $\text{Im}(z) > 0$ に対して以下の積分を考える。

$$\Pi(z, n) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt = n^z \int_0^1 (1 - \tau)^n \tau^{z-1} d\tau$$

第2項から第3項では $\tau = t/n$ と置いて整理した。積分部分は以下のように計算できる。

$$\int_0^1 (1-\tau)^n \tau^{z-1} d\tau = \frac{\tau^z (1-\tau)^n}{z} \Big|_0^1 + \frac{n}{z} \int_0^1 (1-\tau)^{n-1} \tau^z d\tau = \dots = \frac{n!}{(z)_{n+1}}$$

ここで... は部分積分の繰り返し。これから $\Pi(z, n) = \frac{n!n^z}{(z)_{n+1}}$ となり $n \rightarrow \infty$ の極限で Euler 表示の $\Gamma(z)$ に帰着。一方 $\Pi(z, n)$ の被積分関数は $n \rightarrow \infty$ の極限で $(1 - \frac{t}{n})^n \rightarrow e^{-t}$ となるため $\lim_{n \rightarrow \infty} \Pi(z, n)$ は $\Gamma(z)$ の積分表示を与える。

積分路の修正による解析接続 ガンマ関数の定義域は積分の端点、($z = 0$ 近傍)における実数積分が定義できるかで決まっている。この制限は実積分を複素積分に書き換えることにより緩和される。

ガンマ関数の定義 (6.2) では $t = 0$ における積分の収束性により $\text{Re}(z) > 0$ という条件がかかる。この積分の代わりに以下のような積分を考える。(Hankel の積分表示)

$$\Gamma(z) = \frac{i}{2 \sin(\pi z)} \int_C dt (-t)^{z-1} e^{-t} \quad (6.3)$$

ここで $C = I + C_\epsilon + II$, (I は正の実軸直上 (虚部は無限小で + 方向) ∞ から ϵ まで, C_ϵ は小さな実数 $\epsilon > 0$ に対して原点周りの小さな円 $t = \epsilon e^{i\theta}$ (θ は 0 から 2π まで), II は正の実軸上 (虚部は無限小で - 方向) ϵ から ∞ までの積分路。この表式は複素平面全体で定義されており、 $\text{Re}(z) > 0$ では (6.2) と同じ値になる。したがって、ガンマ関数の定義 (6.2) の複素平面全体への解析接続を与える。

$\text{Re}(z) > 0$ で一致することの証明 この領域では $\oint_{C_\epsilon} = 0$ となる。 I では $\arg(-t) = -\pi$ なので $(-t)^{z-1} = e^{-\pi i(z-1)} |t|^{z-1}$ 。同様に II では $\arg(-t) = \pi$ なので $(-t)^{z-1} = e^{\pi i(z-1)} |t|^{z-1}$ 。これから

$$\int_C dt (-t)^{z-1} e^{-t} = -(e^{\pi i z} - e^{-\pi i z}) \int_0^\infty d\xi e^{-\xi} \xi^{z-1} = -2i \sin(\pi z) \int_0^\infty d\xi e^{-\xi} \xi^{z-1} \quad \square$$

6.2.2 ベータ関数

ベータ (Beta) 関数は $p, q \in \mathbb{C}$ に対する 2 変数関数であり、次の積分表示で定義される。

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = \int_0^\infty dy \frac{y^{q-1}}{(1+y)^{p+q}}$$

ただし、積分が収束するためには $\text{Re} p > 0, \text{Re} q > 0$ が必要。(第二項と第三項は変数変換 $y = (1-x)/x$ を行うと同等であることが示せる)

ベータ関数はガンマ関数と次のように関係づけられる。

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

証明: 最初の積分表示で $x = v/w$ と変数変換する (w は定数で v が変数) と

$$w^{p+q-1}B(p, q) = \int_0^w v^{p-1}(w-v)^{q-1}dv$$

この両辺に e^{-w} をかけて w について $[0, \infty)$ で積分すると

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \Gamma(p+q)B(p, q) \\ \text{右辺} &= \int_0^\infty e^{-w}dw \int_0^w dvv^{p-1}(w-v)^{q-1} \\ &= \int_0^\infty dvv^{p-1}e^v \int_v^\infty e^{-(w-v)}(w-v)^{q-1}dw \\ &= \int_0^\infty dvv^{p-1}e^v \int_0^\infty e^{-(w')} (w')^{q-1}dw' = \Gamma(p)\Gamma(q) \end{aligned}$$

ベータ関数の性質

- $B(p, q) = B(q, p)$
- $B(p, q+1) = \frac{q}{p+q}B(p, q)$ [証明] ベータ関数のをガンマ関数で書き換えガンマ関数の漸化式を用いる。
- $B(p, q) = B(p+1, q) + B(p, q+1)$ [証明] $B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}(x+(1-x))dx = \text{右辺}$ 。
- $B(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}) = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{p-1} \theta \sin^{q-1} \theta d\theta$ [証明] $\cos^2 \theta = x$ と置くと $dx = -2 \cos \theta \sin \theta$ 。また $\sin \theta = (1-x)^{1/2}$ 。これらを積分式に代入するとベータ関数の積分公式が得られる。

一般化されたベータ関数 n 個の変数 t_i ($i = 1, \dots, n$) に対して領域 Δ_n を $\Delta_n = \{t_i | t_i \geq 0, \sum_i t_i = 1\}$ で定義する。

$$\int \dots \int_{\Delta_n} (t_1)^{p_1-1} \dots (t_n)^{p_n-1} d^{n-1}t = \frac{\Gamma(p_1) \dots \Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1 + \dots + p_n)}$$

ここで左辺の積分は次のように定義される。

$$\int \dots \int_{\Delta_n} d^{n-1}t f(t_1, \dots, t_n) = \int_0^1 dt_1 \int_0^{1-t_1} dt_2 \dots \int_0^{1-t_1-\dots-t_{n-2}} dt_{n-1} f(t_1, \dots, t_{n-1}, 1-t_1-\dots-t_{n-1})$$

証明: 帰納法を用いる。 $n = 2$ の場合正しいことをすでに知っている。 n まで正しいとすると

$$\begin{aligned} \text{(LHS)} &= \int_0^1 dt_1 \int_0^{1-t_1} dt_2 \dots \int_0^{1-\sum_1^n t_i} t_1^{p_1-1} \dots t_{n-1}^{p_{n-1}-1} (1 - \sum_1^{n-1} t_i)^{p_n-1} \\ &= \int_0^1 dt_1 \int_0^1 dt_2 \int_0^{1-\tilde{t}_2} dt_3 \dots \int_0^{1-\sum_2^n \tilde{t}_i} dt_{n-1} t_1^{p_1-1} (1-t_1)^{\sum_2^n p_i-1} \tilde{t}_2^{p_2-1} \dots \tilde{t}_{n-1}^{p_{n-1}-1} (1 - \sum_1^{n-1} \tilde{t}_i)^{p_n-1} \\ &= B(p_1, \sum_2^n p_i) \frac{\Gamma(p_2) \dots \Gamma(p_n)}{\Gamma(p_2 + \dots + p_n)} = \text{(RHS)}. \end{aligned} \tag{6.4}$$

ここで1行目から2行目へは変数変換 $t_i = (1 - t_1)\tilde{t}_i$ ($i = 2, \dots, n - 1$), 2行目から3行目へは帰納法の仮定とベータ関数の定義を用いた (t_1 積分の部分)。

ベータ関数の Pochhammer 積分表示: ガンマ関数と同様にベータ関数の定義域は積分の端点における積分の収束により定まっている。この問題はガンマ関数と同様に積分路を複素積分に変更することにより緩和される。すべての $p, q \in \mathbb{C}$ に対して収束する (極は除く) 積分表示として

$$B(p, q) = -\frac{e^{-\pi i(p+q)}}{4 \sin(p\pi) \sin(q\pi)} \int_{P_1^+ + P_0^+ + P_1^- + P_0^-} t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt$$

が知られている。リーマン面の意味で積分路が閉じているのは既に確認済み。 $\operatorname{Re}(p) > 0, \operatorname{Re}(q) > 0$ で積分がベータ関数の積分表示と一致していることはガンマ関数と同様に調べられる。

証明: 被積分関数は各分岐点の周りで一周する際位相因子が以下のように変化する。(位相以外は同じ値になるのに注意)

- P_1^+ : $1 \rightarrow e^{2\pi i q}$
- P_0^+ : $e^{2\pi i q} \rightarrow e^{2\pi i(p+q)}$
- P_1^- : $e^{2\pi i(p+q)} \rightarrow e^{2\pi i p}$
- P_0^- : $e^{2\pi i p} \rightarrow 1$

以上の経路を一周回ると位相因子が1に戻るので最初のリーマン面の点に戻ったと考える。これらの因子をすべて加えると

$$1 - e^{2\pi i q} + e^{2\pi i(p+q)} - e^{2\pi i p} = (1 - e^{2\pi i p})(1 - e^{2\pi i q}) = -4e^{\pi i(p+q)} \sin(p\pi) \sin(q\pi)$$

この因子がもともとの $[0, 1]$ 積分と比べて余分かけられるので、それで割っておくと正しい規格化因子となる。

6.2.3 ゼータ関数

定義 ゼータ関数 ($\zeta(z)$) は以下のように定義される。

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$$

既に見てきたようにこの表式は $\operatorname{Re}(z) > 1$ の場合に絶対収束する。

ゼータ関数は整数論と深い関係にある。オイラー積公式。

$$\zeta(z) = \prod_{p \in \text{素数}} \frac{1}{1 - p^{-z}}$$

ゼータ関数の性質を調べることは素数の性質を調べることと密接に関連する。複素関数の解析性と整数論がつながる数学的に興味深い例を与える。

証明

$$\begin{aligned}\zeta(z) &= 1^{-z} + 2^{-z} + 3^{-z} + 4^{-z} + 5^{-z} + 6^{-z} + \dots \\ 2^{-z}\zeta(z) &= 2^{-z} + 4^{-z} + 6^{-z} + \dots \\ (1 - 2^{-z})\zeta(z) &= 1^{-z} + 3^{-z} + 5^{-z} + 7^{-z} + 9^{-z} + \dots \\ 3^{-z}(1 - 2^{-z})\zeta(z) &= 3^{-z} + 9^{-z} + 15^{-z} + \dots \\ (1 - 3^{-z})(1 - 2^{-z})\zeta(z) &= 1^{-z} + 5^{-z} + 7^{-z} + \dots\end{aligned}$$

以上のように順番に決まった素数の倍数が順番に引かれていき、極限では1のみが残る。ゼータ関数に関連して数学的に有名な話題としてリーマン予想が挙げられる。

リーマン予想: $\zeta(z)$ のゼロ点は $z = -2n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) (自明なゼロ点), とそれ以外の非自明なゼロ点に別れており非自明なゼロ点の実部は $\frac{1}{2}$ となる。

この命題は現在でも未解決。ゼータ関数と整数論について詳しいことは黒川信重氏の多くの著書で熱く語られているので数学好きな学生にはおすすめ。

積分表示: ゼータ関数の解析性や具体的な計算を行う際には以下の積分公式が重要である。定義域 $\text{Re}(z) > 0$ に対して以下の積分はゼータ関数を与える。

$$\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt \quad (6.5)$$

証明: $(e^t - 1)^{-1} = e^{-t}(1 - e^{-t})^{-1} = \sum_{n=1}^\infty e^{-nt}$ を代入。 $\text{Re}(t) > 0$ であれば $|e^{-t}| < 1$ なので絶対かつ一様に収束する数列を与えることに注意。項別積分すると

$$\begin{aligned}\text{右辺} &= \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty t^{z-1} e^{-nt} dt \\ &= \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty dy \left(\frac{y}{n}\right)^{z-1} e^{-y} \frac{dy}{n} \\ &= \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^z \Gamma(z)} \Gamma(z) = \zeta(z)\end{aligned}$$

積分公式 (6.5) は以下のような複素積分で複素平面の全領域に解析接続可能である。

$$\zeta(z) = -\frac{\Gamma(1-z)}{2\pi i} \int_C \frac{(-t)^{z-1}}{e^t - 1} dt \quad (6.6)$$

なお、積分路はガンマ関数の積分路 (6.3) と同じ。積分路を複雑化したため余分に因子 $\frac{i}{2 \sin \pi z}$ がかけられるが、もともとある $\Gamma(z)^{-1}$ と組み合わせるとガンマ関数の公式 $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ により与えられた係数を与える。

ゼータ関数の性質

- ゼータ関数 $\zeta(z)$ は $z = 1$ のみに一位の極を持ち、その点における留数は $\text{Res}_{z=1}\zeta(z) = 1$ である。

証明: 積分公式 (6.6) の積分パートは複素平面上すべての z に対して収束している。したがって、発散する可能性があるのは $\Gamma(1-z)$ の極、すなわち $z = 1, 2, 3, \dots$ においてのみである。一方 $z = 2, 3, 4, \dots$ に対しては和の定義を用いると収束しているので除去可能な特異点である。 $z = 1$ の近傍では $z = 1 + \epsilon$ と置くと

$$\zeta(1 + \epsilon) = -\frac{\Gamma(-\epsilon)}{2\pi i} \int_C \frac{1}{e^t - 1} dt$$

となるが、被積分関数は一価関数なので $\int_{I+II} = 0$ となる。また $t = 0$ に極を持ち $\text{Res}_{t=0} \frac{1}{e^t - 1} = 1$ なので留数定理により (積分) $= 2\pi i$ となる。 $\Gamma(-\epsilon) \sim -\frac{1}{\epsilon}$ なので $\zeta(1 + \epsilon) \sim \frac{1}{\epsilon} + \text{有限}$ となる。

- 特殊値 : $m = 1, 2, 3, \dots$ として、
 - $\zeta(0) = -1/2$
 - $\zeta(2m) = \frac{B_n(2\pi)^{2n}}{2(2n)!}$
 - $\zeta(-2m) = 0$
 - $\zeta(1 - 2m) = (-1)^m \frac{B_m}{2m}$
 - ζ が 3 以上の正の奇数の場合は有限かつ無理数。 $\zeta(3) = 1.20205\dots$ (アペリー定数), $\zeta(5) = 1.0369\dots$, $\zeta(7) = 1.00834\dots$ など。引数が増加すると 1 に近づいていく。

ここで B_m はベルヌイ数 (Bernoulli number)。Bernoulli 数は展開

$$\frac{t}{e^t - 1} = 1 - \frac{t}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{B_n t^{2n}}{(2n)!}$$

で定義される。 $B_1 = \frac{1}{6}$, $B_2 = \frac{1}{30}$, $B_3 = \frac{1}{42}$, $B_4 = \frac{1}{30}$ 。

$$\begin{aligned}\zeta(0) &= 1 + 1 + 1 + \cdots = -\frac{1}{2} \\ \zeta(-1) &= 1 + 2 + 3 + \cdots = -\frac{1}{12}\end{aligned}$$

など常識的でない値を返すが解析接続と除去可能な特異点の振る舞いであり、場の量子論などでもよく用いられる。

証明: ここでは z が負の整数の場合の証明を与える。

$z = -n$ を (6.6) に代入。

$$-\frac{1}{2\pi i} \Gamma(1+n) \int_C \frac{(-x)^{-n-1} e^{-x}}{1-e^{-x}} dx$$

被積分関数は一価関数なので積分路は原点周りの小さな円 C_ϵ にすることができる。このとき、

$$\frac{(-x)^{-n-1}}{e^x - 1} = (-1)^{n+1} x^{-n-2} \frac{x}{e^x - 1} = (-1)^{n+1} x^{-n-2} \left(1 - \frac{x}{2} - \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{B_m x^{2m}}{(2m)!} \right)$$

$x = 0$ における留数積分を行うので、 $\zeta(n)$ の値はカッコ内の x^{n+1} の係数に $(-1)^n \Gamma(1+n) = (-1)^n n!$ をかけたものとなる。例えば $\zeta(-2m)$ の場合はカッコ内の x^{-2m+1} の係数となるが $m = 0$ の場合を除いて対応する係数がないのでゼロとなる。 $m = 0$ の場合は係数が $-1/2$ で $(-1)^n n = 1$ なので $\zeta(0) = -1/2$ 。 $\zeta(1-2m) = (-1)^{m+1} \frac{B_m}{(2m)!} (-1)^{2m-1} (2m-1)! = (-1)^m \frac{B_m}{2m}$ 。

- 相反公式：ゼータ関数もガンマ関数の相反公式に似た関係式を満たす。(証明略)

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin(\pi s/2) \Gamma(1-s) \zeta(1-s)$$

6.3 漸近展開と最急降下法

漸近展開 $z = \infty$ を除いて発散する無限級数 $\sum_{n=0}^{\infty} A_n z^{-n}$ が次の2つの条件をみたすとき $f(z)$ の漸近展開と呼び次のように書く。

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^{-n}$$

$S_n = \sum_{\ell=0}^n A_\ell z^{-\ell}$, $R_n(z) = z^n (f(z) - S_n(z))$ に対して

- z を固定したとき $\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(z)| = \infty$: 各 z に対して級数が収束しない。
- n を固定したとき $\lim_{z \rightarrow \infty} |R_n(z)| = 0$: 各 n に対して $z \rightarrow \infty$ で $f(z) - S_n(z) = O(z^{-n-1})$ 。つまり有限和は $z \rightarrow \infty$ で良い近似を与えている。

$R_n(z)$ は $O(z^n)$ に対する近似の良さを表している。決まった z に対して無限に足すと誤差が大きくなってしまふ。 n を固定したときは $z \rightarrow \infty$ における振る舞いは正しく再現する。

漸近展開は真正特異点の周りで典型的に現れる展開公式である。例えば指数関数 e^z において $z = \infty$ は真性特異点である。 $\text{Re}(z) < 0$ という領域における漸近展開は

$$e^z \sim 0$$

となる。なぜならばどのような $n > 0$ に対しても $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |e^{-z} z^n| = 0$ となるからである。一方 $\text{Re}(z) > 0$ では $|z| \rightarrow \infty$ で関数の値が発散するため意味のある展開が得られない。以下もう少し非自明な例を上げる。

漸近展開は $z = \infty$ の周りに限定されるものではなく、収束半径がゼロの展開 (例えば $\sum_{n=0}^{\infty} n!(z-a)^n$ など) で上記の条件を満たすようであれば $z = a$ の周りの漸近展開と呼ばれる。

例: x を正の実数とする。以下のように積分で定義される関数 $f(x)$ について考える。

$$f(x) = \int_x^{\infty} t^{-1} e^{x-t} dt \sim \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}$$

証明：部分積分を繰り返す

$$\begin{aligned} f(x) &= -e^{x-t} \frac{1}{t} \Big|_x^{\infty} - \int_x^{\infty} t^{-2} e^{x-t} dt \\ &= \frac{1}{x} + e^{x-t} \frac{1}{t^2} \Big|_x^{\infty} + 2 \int_x^{\infty} t^{-3} e^{x-t} dt \\ &= \dots = \sum_{\ell=1}^n (-1)^{\ell-1} \frac{(\ell-1)!}{x^\ell} + (-1)^n n! \int_x^{\infty} \frac{e^{x-t}}{t^{n+1}} dt \end{aligned}$$

まず展開 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}$ の収束半径はゼロ。したがって任意の x について級数は発散する。一方 n 項まで取った誤差は

$$R_n(x) = x^n(f(x) - S_n(x)) = (-1)^n n! x^n \int_x^{\infty} \frac{e^{x-t}}{t^{n+1}} dt$$

であるが積分範囲内で $(x/t) < 1$ なので

$$|R_n(x)| < \frac{n!}{x} \int_x^{\infty} e^{x-t} dt = \frac{n!}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0.$$

漸近展開の性質

- (i) 積について閉じている。 $f(z) \sim \sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell z^{-\ell}$, $g(z) \sim \sum_{\ell=0}^{\infty} B_\ell z^{-\ell}$ の場合, $f(z)g(z) \sim \sum_{\ell=0}^{\infty} C_\ell z^{-\ell}$, $C_n = \sum_{\ell=0}^n A_{n-\ell} B_\ell$

(ii) 項別積分可能

(iii) z の偏角により異なる漸近展開を持ちうる (例) 指数関数。合流型超幾何関数。

(iv) Nonuniqueness: 異なる関数が同じ漸近展開を持つことが可能 例: $f(z)$ と $f(z) + e^{-z}$ は同じ漸近展開を持つ

Borel 変換: 収束半径が無い漸近展開に対して有限の収束領域を与える以下のような変換を Borel 変換 と呼ぶ。

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \rightarrow \quad \tilde{f}(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$$

例えば $a_n = n!$ 等の場合、漸近展開は収束半径ゼロであるが、対応する $\tilde{f}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ となり有限の収束半径 $|z| < 1$ を持つようにできる。Borel 変換は逆変換を積分を用いて書くことができる。

$$f(z) = z^{-1} \int_0^{\infty} e^{-t/z} \tilde{f}(t) dt$$

この等式は $z^{-1} \int_0^{\infty} e^{-t/z} t^n dt = n! z^n$ より示すことができる。 $f(z)$ の展開そのものには意味がなくても $\tilde{f}(t)$ が収束する領域から出発して解析接続を行い、逆変換の積分を定義できれば関数 $f(z)$ に対して積分表示による定義域を与えることが可能になる場合がある。物理学における摂動展開は漸近展開であることが多いが、Borel 変換を通して有限の領域で意味を与えられる場合がある。

最急降下法: 積分表示 $J(z) = \int_C e^{zf(t)} dt$ の $z \rightarrow \infty$ における漸近展開をどのように得るのか、という問いに答えるのが最急降下法である。

例: ガンマ関数

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} t^z e^{-t} dt = z^{z+1} \int_0^{\infty} s^z e^{-zs} ds = z^{z+1} \int_0^{\infty} e^{z(\log s - s)} ds$$

(積分変数を $t = sz$ のように変更した) $f(t) = \log t - t$ とおくと上の形になる。

方針 積分路 C を適宜変更して $z \rightarrow \infty$ で積分が評価しやすい積分経路を探す。考慮すべき点として

- $\text{Im}(zf(t)) \neq 0$ の場合、 $z \rightarrow \infty$ で $e^{zf(t)}$ は C 上で激しく振動し、積分するとゼロ近づくが評価するのは難しい。
- $\text{Im}(zf(t)) = 0$ の場合、振動がないので評価しやすい。
- $\text{Re}(zf(t))$ は大きければ大きいほど漸近展開には直接効いてくる。

これらを踏まえた上で、以下のように積分路を変更する。

- $\operatorname{Re}(zf(t))$ が大きい部分： 積分に主に寄与する重要な部分。 $\operatorname{Im}(zf(t)) = 0$ となる道を選ぶ
- $\operatorname{Re}(zf(t))$ が小さい部分： 上記の器用に比べれば漸近展開の意味では $e^{-\Re(x_1-x_2)} \sim 0$ となり漸近展開には寄与しない。
- 全体として積分経路を決める際、もともとの積分経路から上記の制限を守るように閉じた積分経路を変更する。積分路を変える区間に特異点がなければ自由に変更することができることに注意。

鞍点と最急降下線 $zf(t)$ が極値を取る点 ($f'(t) = 0$)。 $t = t_0$ で極値を取るとすると

$$f(t) = f(t_0) + \frac{f''(t_0)}{2}(t - t_0)^2 + O((t - t_0)^3)$$

$f''(t_0)z = Re^{-i\varphi_0}$, $t - t_0 = re^\varphi$ とおくと $z(f(t) - f(t_0)) = \frac{1}{2}Rr^2e^{i(2\varphi - \varphi_0)}$ なので

$$\operatorname{Re}(z(f(t) - f(t_0))) = \frac{Rr^2}{2} \cos(2\varphi - \varphi_0), \quad \operatorname{Im}(z(f(t) - f(t_0))) = \frac{Rr^2}{2} \sin(2\varphi - \varphi_0)$$

これから虚部が 0 になる偏角は $\varphi = \frac{\varphi_0}{2}, \frac{\varphi_0 - \pi}{2}$ の 2 種類があるが、 $\varphi = \frac{\varphi_0}{2}$ に対して $\operatorname{Re}(z(f(t) - f(t_0))) = \frac{Rr^2}{2}$, $\varphi = \frac{\varphi_0 - \pi}{2}$ に対して $\operatorname{Re}(z(f(t) - f(t_0))) = -\frac{Rr^2}{2}$ 。

前者の選択をすると複素積分は $\int dre^{Rr^2/2}$ の形になるので発散し、被積分関数の絶対値が大きい場所で虚部がゼロでない積分路に移行する必要がある。虚部がゼロでない部分の積分の評価は大変難しい。一方、後者の場合は積分路に被積分関数の絶対値が降りていくと積分の値がゼロに近い領域に到達し、そこで虚部がゼロでない積分路に接続すると漸近展開に効かない貢献しか行わないので積分値に寄与しない積分路を適当に選ぶことにより正しい積分の値を得ることができる。

なお積分はガウス積分となる。後者の積分路を最急降下線と呼ぶ。また $t = t_0$ の周りで $\operatorname{Re}(z(f(t) - f(t_0)))$ は鞍のようなグラフを描くので $t = t_0$ を鞍点と呼ぶ。

最急降下線上の積分の評価 偏角を $\varphi = \frac{\varphi_0 - \pi}{2}$ にとり最急降下線の積分を評価すると

$$J(z) \sim e^{zf(t_0)} \int_{-\infty}^{\infty} dre^{i(\varphi_0 - \pi)/2} e^{-Rr^2/2} = e^{zf(t_0)} e^{i(\varphi_0 - \pi)/2} \sqrt{\frac{2\pi}{f''(t_0)ze^{i\varphi_0}}} = e^{zf(t_0)} \sqrt{-\frac{2\pi}{f''(t_0)z}}$$

ガンマ関数 $f(t) = \log t - t$ なので鞍点は $f'(t_0) = t_0^{-1} - 1 = 0$ すなわち $t_0 = 1$ 。 $f''(t_0) = -1$, $f(t_0) = 1$ なので公式に代入すると

$$\Gamma(z + 1) \sim z^{z+1} e^{-z} \sqrt{2\pi/z} = z^{z+\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi} e^{-z}$$

Stirling の公式の初項と一致。

高次の項の計算 以下簡単のため z は正の実数と仮定する ($\varphi_0 = 0$)。積分変数 t を $f(t) = f(t_0) - w^2$ により w に変更する。このとき再急降下線は w の偏角が $0, \pi$ のラインになる。

$$\frac{dt}{dw} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} w^{2n}$$

のように展開できたとすると

$$J(z) \sim e^{zf(t_0)} \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} \int_{-\infty}^{\infty} w^{2n} e^{-zw^2} dw = e^{zf(t_0)} \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} z^{-n-1/2} \Gamma(n + \frac{1}{2})$$

これが求める漸近展開となる。なお、積分の評価は $zw^2 = t$ のように変数変換を行い、 $dw = \frac{1}{2}(tz)^{-1/2} dt$, $w^{2n} = (t/z)^n$ などを用いるとガンマ関数の積分に帰着することを示した。

$$\int_{-\infty}^{\infty} w^{2n} e^{-zw^2} dw = z^{-n-1/2} \int_0^{\infty} t^{n-1/2} e^{-t} dt = z^{-n-1/2} \Gamma(n + \frac{1}{2})$$

6.4 デルタ関数と主値積分

6.4.1 デルタ関数

Dirac のデルタ関数 $\delta(x)$, ($x \in \mathbb{R}$) とは次の条件で定義される。

$$\begin{aligned} \delta(x) &= 0 & x &\neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx &= 1 \end{aligned}$$

物理の文脈では点電荷など一点に何かが集中している状態を書き表すのに便利な関数である。ただし、原点での値が発散しているなどのこともあり、数学的な正確な定義は関数の概念を変更する必要がある (佐藤の超関数、Schwarz の distribution など)

デルタ関数の性質 (すべて上記の性質より導くことができる)

- $f(x)\delta(x) = f(0)\delta(x)$ 。特に $x\delta(x) = 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a)$
- $\delta(-x) = \delta(x)$
- $x \frac{d^n}{dx^n} \delta(x) = -n \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \delta(x)$,

[証明] $\int dx f(x) x \frac{d^n \delta(x)}{dx^n} = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} (x f(x))|_{x=0} = (-1)^n x f^{(n)}(x)|_{x=0} + n(-1)^n f^{(n-1)}(0) = n(-1)^n f^{(n-1)}(0)$ 。同様にして $\int dx f(x) \delta^{(n-1)}(x) f(x) = (-1)^{n-1} f^{(n-1)}(0)$ 。両辺を比べると等式が成立する。

- $f(x)$ を n 個の点 $x = a_i$ ($i = 1, \dots, n$) で $f(a_i) = 0$, $f'(a_i) \neq 0$ を満たす関数とすると

$$\delta(f(x)) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{|f'(a_i)|} \delta(x - a_i)$$

- $\theta(x)$ をステップ関数 (階段関数)

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

とすると $\frac{d}{dx}\theta(x) = \delta(x)$

連続関数の極限としてのデルタ関数 以下の性質を満たす連続関数列の極限としてデルタ関数を定義することもできる。

- $f_n(x)$: ($n = 1, 2, \dots$) 連続関数
- $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ for $\forall x \neq 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx = 1$

このような関数列は unique ではない。例としては $f_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-(nx)^2}$ 。上記の性質を満たすことを示せ。(ガウス積分の公式 $\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2} = \sqrt{\pi/a}$ ($a > 0$) を用いよ。)

連続関数ではないが $f_n(x) = \begin{cases} n & -\frac{1}{2n} < x < \frac{1}{2n} \\ 0 & |x| \geq 1/2n \end{cases}$ のような関数列も用いられる。

6.4.2 複素関数の境界値としてのデルタ関数

積分関係式 $\int dx \delta(x - a) f(x) = f(a)$ と Cauchy の関係式 $\frac{1}{2\pi} \oint dz \frac{f(z)}{z-a} = f(a)$ は関数の一点における値が積分の結果出てくるという点で似ている。より直接的な対応として以下の関係式がある。

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x - i\epsilon} - \frac{1}{x + i\epsilon} \right) \quad (6.7)$$

ここで ϵ は無限小の正の実数を表している。

証明

右辺の表式を $f(x)$ と書く。 $x \neq 0$ では ϵ は無視できるので $f(x) = 0$ となる。一方

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_+ - C_-} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{dz}{z} = 1$$

ここで積分路 C_{\mp} は $z = x \mp i\epsilon$ ($-\infty < x < \infty$) (実軸積分を複素平面上僅かに上下にずらした積分路) であり、 C_0 は原点周りの周回積分である。

6.4.3 主値積分

実積分 $\int_a^b f(x)dx$ で $f(x)$ が区間 $[a, b]$ で特異点 $x = c$ を持つとき積分をどう定義するか？一般には特異点を避けて

$$\int_a^{c-\epsilon_1} f(x)dx + \int_{c+\epsilon_2}^b f(x)dx \quad (\epsilon_1, \epsilon_2 \text{ は小さな正の実数})$$

のような定義を考えたいが、このように定義すると積分結果が ϵ_1, ϵ_2 に依存し不定になることが多い。主値積分 (Principal value integration) とは $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon$ と取ったときの積分で

$$P \int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_a^{c-\epsilon} f(x)dx + \int_{c+\epsilon}^b f(x)dx \right)$$

と定義される。

例 :

$$P \int_{-2}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\ln|x| \Big|_{-2}^{-\epsilon} + \ln|x| \Big|_{\epsilon}^1) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\ln \epsilon - \ln 2 + \ln 1 - \ln \epsilon) = -\ln 2$$

公式 :

$$\frac{1}{x \pm i\epsilon} = P \frac{1}{x} \mp \pi i \delta(x)$$

証明:

$f(x)$ を区間 $[a, b]$ に特異点を持たない任意の実関数、 $f(z)$ を実変数 x を複素変数 z に置き換えた正則関数として

$$\int_a^b \frac{g(x)}{x + i\epsilon} dx = \int_{C_+} \frac{g(z)}{z} dz = P \int_a^b \frac{g(x)}{x} dx - \pi i g(0)$$

ここで C_+ は積分路 $[a, -\epsilon]$, $\epsilon e^{i\theta}$ ($\theta: \pi \rightarrow 0$), $[\epsilon, b]$ を合成したもの。円積分から $g(0)$ がでて、両端の実積分から主値積分が得られる。

第7章 等角写像

7.1 複素写像と等角性

2次元平面の間の写像は一般に

$$x' = f(x, y), \quad y' = g(x, y)$$

のように書ける。複素関数（正則関数）を用いた写像

$$z' = f(z) \quad (x' = u(x, y), \quad y' = v(x, y))$$

を以下では考える。このような写像は複素曲面上の角度を変えないので等角写像あるいは共形写像と呼ばれることがある。

この写像が角度を保つことを示すために複素平面上の2本の曲線をパラメータ表示して $z = z_1(t), z = z_2(t)$ と書き、 $t = 0$ において2本の曲線が交わるものとする ($z_1(0) = z_2(0)$)。交点におけるそれぞれの曲線の接線の偏角は $\theta_i = \arg\left(\frac{dz_i(0)}{dt}\right)$ ($i = 1, 2$) のように書けるので2本の曲線がなす角度は、

$$\theta_1 - \theta_2 = \arg\left(\frac{\frac{dz_1(0)}{dt}}{\frac{dz_2(0)}{dt}}\right)$$

となる。一方これらの曲線は複素写像の後 z' 平面では $f(z_i(t))$ という曲線に写像されるので、 x' 平面における曲線のなす角度は保持される。

$$\theta'_1 - \theta'_2 = \arg\left(\frac{\frac{df(z_1(0))}{dz} \frac{dz_1(0)}{dt}}{\frac{df(z_2(0))}{dz} \frac{dz_2(0)}{dt}}\right) = \arg\left(\frac{\frac{df}{dz} \frac{dz_1(0)}{dt}}{\frac{df}{dz} \frac{dz_2(0)}{dt}}\right) = \arg\left(\frac{\frac{dz_1(0)}{dt}}{\frac{dz_2(0)}{dt}}\right) = \theta_1 - \theta_2, \quad \square$$

7.2 等角写像の物理への応用

7.2.1 等角写像と調和方程式

等角写像の顕著な特徴として調和方程式の形を変えないことが挙げられる。調和方程式は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$$

のように書かれ、2次元の流体力学、電磁気学などで現れる。この方程式は等角写像により不変である。すなわち $z = f(w)$ と置くと

$$\frac{\partial^2 u(z, \bar{z})}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} \frac{\partial^2 u(f(w), \bar{f}(\bar{w}))}{\partial w \partial \bar{w}}$$

のようにかけるので

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial w \partial \bar{w}} = 0$$

つまり座標を変えても方程式は変わらない。等角写像を用いて解きやすい座標系で方程式を解けば、もともとの系における解は座標の書き換えのみにより得られる。

既に学んだように正則関数の実部と虚部は調和関数の解である。このことと等角写像を結びつけると様々な領域における調和関数の解を系統的に得ることができる。調和関数は古典物理学のいたるところに現れるので、多くの応用を持つ。

7.2.2 流体力学

2次元流体力学は速度場 u_x, u_y で記述される。これらは時間と2次元平面の座標 (x, y) の関数である。特に定常な流れを考える場合は時間依存性はないとしてよい。このとき簡単な場合として以下のような条件を考える。

- 湧き出しがない。数式として書くと $\text{div}(\vec{u}) = 0$ 、すなわち

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \tag{7.1}$$

- 回転がない（渦度がゼロ）。 $\text{rot}(\vec{u}) = 0$ 、すなわち

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} = 0 \tag{7.2}$$

方程式(7.1)より速度ベクトルは $u_x = \partial_y \phi$, $u_y = -\partial_x \phi$, また方程式(7.2)により $u_x = \partial_x \psi$, $u_y = \partial_y \psi$ のように書かれる。これらの式は $f(z) = \psi(z) + i\phi(z)$ とおくとき、Cauchy-Riemann の関係式に他ならない。

決まった配位（例えば円柱）の周りの流れを決めようとする際、境界条件としては流れは壁に沿っている必要があるので ϕ は壁に沿って定数でなくてはならない。（等）ポテンシャル面となる。

7.2.3 電磁気学

2次元の静電場を考える。電場は電磁ポテンシャルにより

$$E_x = -\partial_x \phi, \quad E_y = -\partial_y \phi$$

のように書かれることが知られている。また、電荷がない領域では $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ となるため $E_x = \partial_y \psi$, $E_y = -\partial_x \psi$ となる ψ が存在する。これらの方程式は流体力学の場合と全く同様な形をしている。たとえば、導体で壁を定義したとき電磁ポテンシャル ϕ はその表面で定数となる（等ポテンシャル面）。流体力学の場合と同じく等角写像の方法により解を構成し、また等角写像によりより複雑な配位における解を構成することが可能である。

7.3 等角写像の例

7.3.1 一次分数変換

- 座標の並進 (translation)。

$$z' = z + c, \quad c = a + ib \in \mathbb{C}$$

これは $x' = x + a$, $y' = y + b$ という変換を与える。

- 伸縮 (dilatation), 回転 (rotation) をあらかず等角写像である。

$$z' = cz, \quad (c = ae^{i\phi})$$

$z' = r'e^{i\theta'}$, $z = re^{i\theta}$ とかくと

$$r' = ar, \quad \theta' = \theta + \phi$$

- 反転写像 (inversion)

$$z' = 1/z$$

は $z' = r'e^{i\theta'}$, $z = re^{i\theta}$ とかくと

$$r' = 1/r, \quad \theta' = \pi - \theta$$

単位円の内側と外側を入れ替える変換である。

この三種類の写像を組み合わせた変換を一次分数変換と呼ぶ。写像の一般形は

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc = \pm 1)$$

この写像が上記三種の変換で生成されることは

$$\frac{az+b}{cz+d} = \lambda + \frac{\mu}{z+\nu}, \quad \lambda = \frac{a}{c}, \mu = \frac{bc-ad}{c^2}, \nu = \frac{d}{c}$$

のように変形できることからわかる。つまりもともとの座標 z から並進 $z_1 = z + \nu$, 反転 $z_2 = 1/z_1$, 回転・伸縮 $z_3 = \mu z_2$, 最後にもう一度並進 $w = z_3 + \lambda$ を行ったものが一次分数変換である。

一次分数変換は複素平面上の円を円に移す変換と考えることもできる。(直線は半径無限大の円と考える)

[証明] 一次分数変換を構成する、並進、伸縮、回転は円を円に保つことは明らか。複素平面上の円(直線)は一般に次の形に書くことができる。

$$Az\bar{z} + \bar{B}z + B\bar{z} + C = 0$$

(A, C は実数。 B は複素数。図形が直線であるときは $A = 0$ となる。) この方程式に $z = 1/w$ を代入し、式を書き換えると同じ形になる。つまり反転により円は円に写される。□

一次分数変換の例として以下の写像 $w = e^{i\theta} \frac{z-a}{z-\bar{a}}$ ($\Im a > 0$) を考える。この変換は実軸 $\Im(z) = 0$ を半径1の円に、上半平面を円の内部に写す。(これに示すには $\Im(z) = 0$ のとき $\left| e^{i\theta} \frac{z-a}{z-\bar{a}} \right| = 1$ となることを示せばよい。また上半平面上の点 $z = a$ は $w = 0$ に写像されているので上半平面が円の内部に写像されていることがわかる。

一次分数変換を用いると複素平面上の任意の三点 (z_1, z_2, z_3) を $(0, 1, \infty)$ に写像することができる。具体的な写像としては

$$w = \frac{(z_2 - z_3)(z - z_1)}{(z_2 - z_1)(z - z_3)}$$

この複素平面上に4点 (z_1, z_2, z_3, z_4) が与えられたとき z_1, z_2, z_3 を $0, 1, \infty$ に写像したときに z_4 が移る先

$$\frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}$$

を4つの複素数 (z_1, z_2, z_3, z_4) に対する複比 (cross ratio) と呼ぶ。物理数学 II では複素球面上3点に特異点を持つ関数(リーマンのP関数)が現れるが、一次分数変換に対して共変に振る舞うため複比のみに依存する一変数複素関数(超幾何関数)に帰着する。

7.3.2 その他の複素変換

指数関数 指数関数を用いると複素平面の長方形領域を半円の内部(外部、円環など)に移すことが可能である。

$$f(z) = e^z$$

$z = x + iy$ と書くとき長方形領域 $x \in [a, b], y \in [0, \pi]$ は円環領域 $z' = R'e^{i\theta}$ ($R \in [e^a, e^b], \theta \in [0, \pi]$) に写像される。

べき乗 $w = z^n$ ($n = 2, 3, 4, \dots$) z を極座標表示 $z = re^{i\theta}$ すると角を持つ領域 $r > 0, 0 \leq \theta \leq \pi/n$ が上半平面 $\Im w > 0$ に写像される。また、 $n = 2$ の場合は第一象限 ($\Re z > 0, \Im z > 0$) が上半平面 $\Im w > 0$ に、上半平面 $\Im z > 0$ が w の全複素平面 (ただし正の実軸は除く) に写される。

Joukowski 変換 変換 $w = z + \frac{1}{z}$ 。この写像のもとで単位円 $|z| = 1$ は w 平面上の線分 $[-2, 2]$ に写像される。この写像は 2 対 1 であり、円の外側、内側のそれぞれが w の複素平面全体 (線分 $[-2, 2]$ を取り除いた領域) に写像される。 $z = e^{i\theta}$ と置くと $w = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$ 。その他の円は翼の断面の形に写像される。例えば中心 $(0.1, 0.1)$ 、半径 0.9 の円に対して対応する図形を書かせると図 7.1 のようになる。円柱や翼の周りの流体力学の解析などに使われるだけでなく、理論物理学でも現れる。

Schwarz-Christoffel 変換 次の積分で書かれる等角写像。

$$w = f(z) = A \int_{z_0}^z d\zeta (\zeta - \alpha_1)^{\gamma_1/\pi-1} \dots (\zeta - \alpha_n)^{\gamma_n/\pi-1} + B$$

ここで z_0 は上半平面、 $\alpha_1 < \dots < \alpha_n$ は順序が付いた実数列。 γ_i は実数で多角形の内角を表すパラメータである。この変換は z の上半平面を内角 γ_i ($i = 1, \dots, n$) で記述される n 角形の内部に写像する。 n 角形の内角であるためには

$$\gamma_1 + \dots + \gamma_n = (n - 2)\pi$$

が必要となる。特に z_0 は点 $w = B$ に写像される。 z 平面の実軸が多角形の辺に写像することを理解するためには、実軸直上 (わずかに正の虚部を持つ) で z を動かしていったとき、特異点 $z = \alpha_i$ で何が起こるのかを見ればよい。被積分関数 $(\zeta - \alpha_1)^{\gamma_1/\pi-1} \dots (\zeta - \alpha_n)^{\gamma_n/\pi-1}$ の偏角は因子 $(z - \alpha_i)^{\gamma_i/\pi-1}$ により変更を受けるが変更前の偏角は $z - \alpha$ の偏角が π 、すなわち因子の偏角は $\pi(\gamma_i/\pi - 1) = \gamma_i - \pi$ 。 z を α_i の右に持って行った時の偏角は 0 なので因子の偏角も 0 。すなわち通過前と後で偏角は $\pi - \gamma_i$ だけ変更する。特異点を通過しないときには z の変分 Δz に対する w の変分 Δw の偏角は変わらない。以上をまとめると z 平面の実軸は w 平面では折れ曲がった線分に対応して多角形とみなしたときの内角は γ_i となる。

Schwarz-Christoffel 写像の例として以下のような場合を考える。

$$w = f(z) = \int^z \frac{K}{\sqrt{(\zeta - 1)(\zeta + 1)}} = C + K \cosh^{-1} z, \quad (K \text{ は正の実数})$$

$\alpha_1 = -1, \alpha_2 = 1, \gamma_1 = \gamma_2 = \pi/2$ に対応する。 $f(z) = \cosh^{-1}(z)$ の不定積分が $\frac{1}{\sqrt{z^2-1}}$ であることは $w = \cosh^{-1}(z)$ に対して $\frac{dz}{dw} = \sinh w = \sqrt{\cosh^2 w - 1} = \sqrt{z^2 - 1}$ となることから示される。 $C = 0$ の場合、上半平面が w 平面では長方形領域の内部 $\Re(w) > 0, 0 < \Im(w) < \pi K$ に写像される。

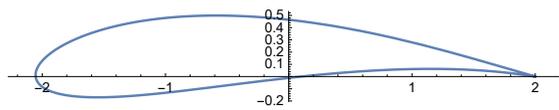


图 7.1: Joukowski 写像

第II部

常微分方程式論

第8章 常微分方程式

8.1 常微分方程式の解の存在と一意性

8.1.1 常微分方程式の一般形と一階の微分方程式への帰着

常微分方程式 (Ordinary Differential Equation = ODE) とは微分する変数が一変数 (ここでは t とする) の微分方程式で、一般には次のような形に書ける。 (n 階の微分方程式と呼ばれる)

$$F\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^n x}{dt^n}\right) = 0$$

ここで F は任意関数であるが、正規形と呼ばれる以下の形に変形できるものとする。

$$\frac{d^n x}{dt^n} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right) = 0$$

この微分方程式は初期条件: $t = t_0$ において $x(t_0) = \xi_0, \frac{dx(t_0)}{dt} = \xi_1, \dots, \frac{d^{n-1}x(t_0)}{dt^{n-1}} = \xi_{n-1}$ を与えると一意に解を持つことを以下示す。 ($\xi_i \in \mathbb{R}$)

まず上記の n 階微分方程式は常に一階の連立微分方程式に帰着することに注意する。すなわち $p_\ell = \frac{d^\ell x}{dt^\ell}$ ($\ell = 1, \dots, n-1$) と置くと

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= p_1, \\ \frac{dp_1}{dt} &= p_2, \\ &\vdots \\ \frac{dp_{n-2}}{dt} &= p_{n-1}, \\ \frac{dp_{n-1}}{dt} &= f(t, x, p_1, \dots, p_{n-1}), \end{aligned}$$

のように書き換えられる。この微分方程式の初期値は $t = t_0$ における値

$$x(t_0) = \xi_0, \quad p_\ell(t_0) = \xi_{\ell 0} \quad (\ell = 1, \dots, n-1)$$

のように与えると以下で与える解の存在・一意性定理により解が一意に決まる。 n 階微分方程式ではこれは $x(t_0), \dots, x^{(n-1)}(t_0)$ に初期値を与えることに相当する。

より一般的には連立一階微分方程式は以下の形に書ける。

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, \vec{x}), \quad \vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad i = 1, \dots, n \quad (8.1)$$

物理的にはこの方程式は時刻 t において \vec{x} に居た粒子が時刻 $t + \Delta t$ において $\vec{x} + \vec{f}\Delta t$ に移動する流れの方程式を定義している。

8.1.2 解の存在と一意性

Γ を t, \vec{x} よりなる $n + 1$ 次元空間の適当な閉領域とする。 Γ の内部で $f_i(t, \vec{x})$ は以下の条件を満たすとする。

- 領域内で最大値が存在している。

$$|f_i(t, x^1, \dots, x^n)| < \exists M, \quad \forall (t, \vec{x}) \in \Gamma$$

- Lipschitz 条件：領域内の任意の点である $K > 0$ が存在して

$$|f(t, \vec{x}) - f(t, \vec{y})| < K|x - y|, \quad |x - y| = \sqrt{\sum_i (x_i - y_i)^2}$$

この時 $\forall (t, x) \in \Gamma$ に対して微分方程式 (8.1) の解が一意的に存在する。

証明: $n = 1$ の場合について証明の概略をステップに分けて説明する。

- Step 1: 積分方程式への書き換え。微分方程式 $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$ の両辺を $t = t_0$ から t まで積分

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, x(s))ds = (A \cdot x)(t), \quad (A \cdot x)(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, x(s))ds$$

微分方程式の解は積分演算子 A の固定点と同一視できる。

- Step 2: 再来近似 (Picard): $x_0(t) = x_0$ (定数関数) として関数列 $\{x_n(t)\}$ を順番に

$$x_n(t) = A \cdot x_{n-1}(t) = x_{n-1}(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, x_{n-1}(s))ds$$

のように決めていく。この時 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = x(t)$ が収束していれば $x(t)$ が求める解となる。

- Step 3: 一様収束性の証明。上記の M, K に対して (t_0, x_0) の周りで

$$|x_n(t) - x_{n-1}(t)| < MK^{n-1} \frac{|t - t_0|^n}{n!}$$

証明: $n = 1$ の場合は $|x_1(t) - x_0(t)| = \left| \int_{t_0}^t f(s, x_0) \right| < M|t - t_0|$ 。 $n = \ell$ まで成立したとすると

$$\begin{aligned} |x_{\ell+1}(t) - x_{\ell}(t)| &= \left| \int_{t_0}^t (f(s, x_{\ell}(s)) - f(s, x_{\ell-1}(s))) \right| \\ &\leq K \left| \int_{t_0}^t |x_{\ell}(s) - x_{\ell-1}(s)| ds \right| \\ &< \frac{MK^{\ell}}{\ell!} \left| \int_{t_0}^t |s - t_0|^{\ell} \right| \leq \frac{MK^{\ell}|t - t_0|^{\ell+1}}{(\ell + 1)!} \end{aligned}$$

ここで一行目から二行目は Lipschitz 条件を用いた。二行目から三行目は帰納法の仮定による。右辺はべき級数であるが収束半径は無限大である。以上により再起方程式の解が一様収束することが導かれた。

- 一意性の証明：略

8.2 積分により可解な微分方程式の例

簡単な微積分により微分方程式が解けるものとして以下の例があげられる。

- 変数分離型: $\frac{dx}{dt} = \frac{f(t)}{g(x)}$ の形の微分方程式は

$$g(x)dx = f(t)dt \Rightarrow G(x) = F(t) + C, \quad G(x) = \int^x g(x)dx, \quad F(t) = \int^t dt f(t)$$

により積分で解を求めることができる。

- 完全積分形: $P(t, x) \frac{dx}{dt} = Q(t, x)$ ($\frac{dx}{dt} = \frac{Q}{P}$), という形の微分方程式は $\partial_t P = -\partial_x Q$ という条件のもとに解が求まる。条件が満たされたとき

$$P = \partial_x \phi, \quad Q = -\partial_t \phi,$$

を満たす $\phi(x, t)$ が存在することを示す。まず最初の方程式で両辺を x 積分すると

$$\phi(x, t) = \int_{x_0}^x P(\xi, t) d\xi + C(t), \tag{8.2}$$

となる。ここで $C(t)$ は時間の任意関数。 P を用いて構成された ϕ に対して $Q = \partial_t \phi$ という要請を置くと、積分定数の $C(t)$ が

$$\partial_t C(t) = -Q(x_0, t) \tag{8.3}$$

という条件を満たす必要があることがわかる。この微分方程式は x_0 が定数なので $C(t) = -\int^t ds Q(x_0, s)$ のように定めることができる。以上により $\phi(x, t)$ が定まった。一旦 $\phi(t, x)$ を定めると微分方程式の解は $\phi(x(t), t) = C$ により定まる。ただし C は定数。

一般に条件 $\partial_t P = -\partial_x Q$ が満たされなかった場合でも適当な因子 $f(x, t)$ により $\partial_t(fP) = -\partial_x(fQ)$ が満たされれば $P' = fP, Q' = fQ$ のようにおけば完全積分系に書き直すことができる。このような因子が存在する場合 $f(t, x)$ を積分因子 (integrating factor) と呼ぶ。

8.3 線形微分方程式

線形微分方程式の一般形は

$$\mathcal{L}x = \left(\frac{d^n}{dt^n} + u_1(t) \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + u_n(t) \right) x(t) = Q(t)$$

のように書ける。 $Q(t) = 0$ の場合の方程式を斉次型と呼び $Q(t) \neq 0$ の場合は非斉次型と呼ぶ。斉次型線形微分方程式の一般解は n 個の解の線形和

$$x(t) = \sum_{\ell=1}^n c_\ell f_\ell(t)$$

ここで $f_\ell(t)$ は微分方程式の一次独立な解である。 c_ℓ は積分定数。初期値が n 個必要な方程式なので c_ℓ を与えるとすべての初期値が決まり、上記の解が一般解となる。

非斉次型の場合は非斉次方程式の解 (特解と呼ばれる) $x_0(t)$ を一つ見つけると一般解は次の形に書ける。

$$x(t) = x_0(t) + \sum_{\ell=1}^n c_\ell f_\ell(t)$$

8.3.1 解から微分方程式へ (Wronskian の方法)

線形代数によると M 次元空間 \mathbb{R}^M 中の m 個のベクトル \vec{v}_ℓ ($\ell = 1, \dots, m, M \geq m$) が線形独立であるための必要十分条件は、ある $1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq M$ に対して

$$\begin{vmatrix} v_1^{i_1} & \cdots & v_m^{i_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1^{i_m} & \cdots & v_m^{i_m} \end{vmatrix} \neq 0$$

となることである。これから n 個の関数 $v_1(t), \dots, v_n(t)$ が関数として線形独立であるための必要十分条件はその Wronskian

$$W(v_1, \dots, v_n) = \begin{vmatrix} v_1(t) & \cdots & v_n(t) \\ v_1'(t) & \cdots & v_n'(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1^{(n-1)}(t) & \cdots & v_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

がある t に対してゼロでなければ良い。

逆に任意に与えられた関数 $v_1(t), \dots, v_n(t)$ に対して $\sum_{i=1}^n c_i v_i(t)$ を一般解として持つ齊次微分方程式の形は

$$W(x, v_1, \dots, v_n) = 0 \tag{8.4}$$

となる。Wronskian の引数が $n + 1$ 個なので、 n 階の微分方程式を与えていることに注意する。解を知っている場合には対応する微分方程式が簡単に求まる。

系として微分方程式を $\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots = 0$ の形に書いたとすると

$$a_1(t) = -\frac{d}{dt} \log W(v_1, \dots, v_n)$$

となる。証明は (8.4) を $\frac{d^l x}{dt^l}$ について展開したとき $\frac{d^n x}{dt^n}$ の係数は $W(v_1, \dots, v_n)$, $\frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}}$ の係数は

$$-\begin{vmatrix} v_1(t) & \cdots & v_n(t) \\ v_1'(t) & \cdots & v_n'(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1^{(n-2)}(t) & \cdots & v_n^{(n-2)}(t) \\ v_1^{(n)}(t) & \cdots & v_n^{(n)}(t) \end{vmatrix} = -\frac{d}{dt} W(v_1, \dots, v_n)$$

となることに注意し、 $\frac{1}{W} \frac{dW}{dt} = \frac{d \log W}{dt}$ から得られる。

8.3.2 一階線形微分方程式

微分方程式は

$$\frac{dx}{dt} + u(t)x = Q(t)$$

の形である。 $Q(t) = 0$ とした齊次方程式の解は $x'(t) = -u(t)x(t)$ より $\frac{dx}{x} = -u(t)dt$ つまり、変数分離型である。両辺を積分すると $\log x = -\int^t u(s)ds$ 。つまり齊次方程式の一般解は

$$x = C e^{-\int^t u(s)ds}$$

となる。

$Q(t) \neq 0$ の場合の解を求めるためには、定数であった C を t に依存すると仮定して方程式に代入する (定数変化法)。

$$\frac{dx}{dt} + u(t)x = \dot{C}e^{-\int^t u(s)ds} = Q(t) \quad (8.5)$$

この方程式は積分で解が求まり $C(t) = \int^t ds Q(s)e^{\int^s u(r)dr}$, まとめると非斉次方程式の一般解は

$$x(t) = e^{-\int^t u(s)ds} \left(\int^t Q(s)e^{\int^s u(r)dr} ds + C \right)$$

Bernoulli 方程式: $\frac{dx}{dt} + P(t)x = Q(t)x^n$ の形の微分方程式は $y = x^{1-n}$ とおくと、 $\frac{dy}{dt} = (1-n)x^{-n}\frac{dx}{dt}$ により一階の線形微分方程式

$$\frac{dy}{dt} + (1-n)Py = (1-n)Q$$

の形に帰着する。上記の解法を用いることにより一般解を見つけることができる。

8.3.3 2階斉次微分方程式

2階斉次微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p(t)\frac{dx}{dt} + q(t)x(t) = 0$$

の場合、一般解を $p(t), q(t)$ を用いて陽に表すのは難しい。しかし、独立な解を $v_1(t), v_2(t)$ と書いたとき、解と係数の関係により

$$p(t) = -\frac{d}{dt} \log W(v_1, v_2), \quad \rightarrow \quad W(v_1, v_2) = v_1 v_2' - v_2 v_1' = e^{-\int^t p(s)ds}$$

となるので、2つの独立な解のうち一つが既知であれば(v_1 を知っていたとする), v_2 は一階の非斉次方程式

$$\dot{v}_2 - \frac{v_1}{v_1} v_2 = \frac{1}{v_1} e^{-\int^t p(s)ds}$$

を満たす。一階の非斉次微分方程式の解の公式を用いると $u(t) = -\frac{\dot{v}_1}{v_1} = -\frac{d}{dt} \log v_1$, $Q = \frac{1}{v_1} e^{-\int^t p(s)ds}$ を代入して

$$v_2(t) = v_1(t) \left(\int^t \frac{1}{v_1(s)^2} e^{-\int^s p(u)du} ds + C \right)$$

のように第2の解を求めることができる。これを Frobenius の方法 と呼ぶ。

第9章 定数係数線形微分方程式と Laplace 変換

9.1 定数係数線形微分方程式

ここでは

$$(D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_n)x(t) = Q(t), \quad D = \frac{d}{dt}$$

(a_1, \dots, a_n は定数) の形の微分方程式を取り扱う。 $\phi(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_n$ と置くと $\phi(p) = \prod_i (p - p_i)^{n_i}$ のように因数分解できる。

$Q(t) = 0$ の場合 (斉次型)

定理:

$$(D - p)^n f(t) = 0 \tag{9.1}$$

の解は

$$f(t) = e^{pt} \sum_{\ell=0}^{n-1} C_\ell t^\ell$$

となる。(C_ℓ は積分定数。)

[証明]: 微分の性質により $D(e^{pt} f(t)) = e^{pt}(D+p)f(t)$ 。これを繰り返し用いると $(D-p)^n(e^{pt} f(t)) = e^{pt} D^n f(t)$ となる。これから (9.1) の解は $D^n f(t) = 0$ の解を $f_0(t)$ とすると $e^{pt} f_0(t)$ の形になる。一方 $D^n f(t) = 0$ の一般解が $\sum_{\ell=0}^{n-1} C_\ell t^\ell$ の形になるのは明らかである。 \square

系: より一般的な $\phi(p) = \prod_i (p - p_i)^{n_i}$ の場合、 $\phi(D)f(t) = 0$ の一般解は重ね合わせを用いて以下のように書ける。

$$f(t) = \sum_i e^{p_i t} \left(\sum_{\ell=0}^{n_i-1} C_\ell^{(i)} t^\ell \right)$$

例 $(D^2 + \omega^2)f(t) = 0$ 。 $p^2 + \omega^2 = (p + i\omega)(p - i\omega)$ 。これから一般解は

$$f(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t} = A' \sin(\omega t) + B' \cos(\omega t)$$

$(D^2 + \omega^2)^2 f(t) = 0$ の解は $f(t) = (A'_0 + A'_1 t) \sin(\omega t) + (B'_0 + B'_1 t) \cos(\omega t)$ となる。

9.1.1 非斉次方程式

非斉次で、 $Q(t) = F(t)e^{\lambda t}$ (F は t の r 次式) という形の場合

$$x(t) = t^k g(t) e^{\lambda t}$$

の形の特解を持つ。ここで k は $\phi(p)$ における因子 $(p - \lambda)$ の重複度、つまり $\phi(p) = (p - \lambda)^k \tilde{\phi}(p)$ ($\tilde{\phi}(\lambda) \neq 0$) のような因数分解が可能であるとする。 $g(t)$ は t の r 次式。

[証明]: $x(t) = e^{\lambda t} G(t)$ と置いて微分方程式に代入すると

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(D)(D - \lambda)^k e^{\lambda t} G(t) &= e^{\lambda t} \tilde{\phi}(D + \lambda) D^k G(t) = F(t) e^{\lambda t} \\ \rightarrow \phi(D + \lambda) D^k G(t) &= F(t) \end{aligned}$$

この式を解けばよいが、右辺は r 次の多項式で左辺は $G(t) = t^k g(t)$ ($g(t)$ は t の r 次式) のようにおけば両辺とも r 次の多項式になるので $g(t)$ を適切に置けば解が得られる。□

$Q(t) = F(t) \sin(\lambda t), F(t) \cos(\lambda t)$ などの形の場合は $Q(t) = Q_1 + Q_2$, $Q_i = F(t) e^{\pm i\lambda t}$ のように分解し右辺が $Q_i(t)$ に対する特解 $x_i(t)$ を重ね合わせれば $Q(t)$ に対する特解 $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ が得られる。

定数係数線形微分方程式は Laplace 変換を用いるとより見通し良く解を得ることができる。

9.2 Laplace 変換

$t \geq 0$ で連続な関数 $f(t)$ に対して

$$\tilde{f}(p) = \mathcal{L}(f)(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

のような積分変換を Laplace 変換と呼ぶ。Laplace 変換は定数係数微分方程式を解くためによく用いられる。積分の下限 0 は微分方程式に応用する場合は初期値を与える時刻 t_0 に対応する。以下では $t \geq 0$ で連続な関数を考察する。

9.2.1 その他の積分変換

- Fourier 変換: 偏微分方程式を解くのに用いられ、使用頻度が高い。

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{i\omega t}$$

- Mellin 変換

$$\tilde{f}(\alpha) = \int_0^{\infty} f(t)t^{\alpha-1}dt$$

9.3 Laplace 変換の例

- $f(t) = e^{\lambda t} \Rightarrow \tilde{f}(p) = \int_0^{\infty} e^{-(p-\lambda)t}dt = \frac{1}{p-\lambda}$ (積分の収束のためには $\Re(p-\lambda) > 0$ が必要)
- $f(t) = t^z \Rightarrow \tilde{f}(p) = \Gamma(z+1)p^{-z-1}$ ($\Re(z) > -1$)
- より一般的に $f(t) = t^z e^{\lambda t}$ に対して $\tilde{f}(p) = (p-\lambda)^{-z-1}\Gamma(z+1)$

証明 :

$$\begin{aligned} \tilde{f}(p) &= \int_0^{\infty} e^{-pt}t^z e^{\lambda t}dt = \int_0^{\infty} t^z e^{-(p-\lambda)t}dt \\ &= \int_0^{\infty} (p-\lambda)^{-z-1}s^z e^{-s}ds = \int_0^{\infty} (p-\lambda)^{-z-1}s^z e^{-s}ds = (p-\lambda)^{-z-1}\Gamma(z+1) \end{aligned}$$

一行目から二行目では変数変換 $s = (p-\lambda)t$ を用いた。

- $f(t) = \delta(t-a) \Rightarrow \tilde{f}(p) = e^{-pa}$
- $f(t) = \cosh(kx) \Rightarrow \tilde{f}(p) = \frac{p}{p^2-k^2}$
- $f(t) = \sinh(kx) \Rightarrow \tilde{f}(p) = \frac{k}{p^2-k^2}$
- $f(t) = \cos(kx) \Rightarrow \tilde{f}(p) = \frac{p}{p^2+k^2}$
- $f(t) = \sin(kx) \Rightarrow \tilde{f}(p) = \frac{k}{p^2+k^2}$

9.4 基本的な性質

- 微分 : $f(t)$ の Laplace 変換を $\tilde{f}(p)$ とすると $\frac{df}{dt}$ に対する Laplace 変換は

$$\mathcal{L}(f'(t))(p) = p\tilde{f}(p) - f(0)$$

となる。

証明: 部分積分を用いると $\int_0^{\infty} dt f'(t)e^{-pt} = f(t)e^{-pt}|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} pf(t)e^{-pt}dt$

同様にして以下の等式が示される：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(\frac{d^2 f}{dt^2}\right)(p) &= p^2 \tilde{f}(p) - pf(0) - \dot{f}(0) \\ \mathcal{L}\left(\frac{d^n f}{dt^n}\right)(p) &= p^n \tilde{f}(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}\dot{f}(0) - f^{(n-1)}(0)\end{aligned}$$

- 畳み込み：2つの関数 $f(t), g(t)$ に対して畳み込みを

$$f \star g(t) = \int_0^t f(s)g(t-s)ds$$

と定義する。畳み込みは可換 $f \star g = g \star f$ であり、結合則 $f \star (g \star h) = (f \star g) \star h$ も成立する。畳み込みに対する Laplace 変換は

$$\mathcal{L}(f \star g(t)) = \tilde{f}(p)\tilde{g}(p)$$

で与えられる。

証明：

$$\begin{aligned}LHS &= \int_0^\infty e^{-pt} \int_0^t ds f(s)g(t-s) \\ &= \int_0^\infty ds \int_s^\infty dt e^{-pt} f(s)g(t-s) \\ &= \int_0^\infty ds \int_0^\infty du e^{-p(s+u)} f(s)g(u) = RHS\end{aligned}$$

一行目から二行目へは積分順序の変更を、二行目から三行目へは変数変換 $t = s + u$ を行った。

- 積分

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(u)du\right) = \frac{1}{p}\mathcal{L}(f(t))$$

証明：畳み込みで $g(t) = 1$ 定数関数と置くと $f \star g(t) = \int_0^t f(s)ds$ となる。定数関数 $g(t) = 1$ は指数関数 $e^{\lambda t}$ で $\lambda = 0$ とすると得られるので $\tilde{g}(p) = 1/p$ となる。畳み込みに対する Laplace 変換の公式を適用すれば。

- $e^{at}f(t)$: $\mathcal{L}(e^{at}f(t))(p) = \int_0^\infty dt e^{at}f(t)e^{-pt} = \tilde{f}(p-a)$
- $t^n f(t)$: $\mathcal{L}(t^n f(t))(p) = \int_0^\infty dt t^n f(t)e^{-pt} = (-1)^n \left(\frac{d^n}{dp^n}\right) \int_0^\infty f(t)e^{-pt} dt = (-1)^n \tilde{f}^{(n)}(p)$

9.5 逆 Laplace 変換

Laplace 変換の逆変換を逆 Laplace 変換と呼ぶ。逆 Laplace 変換は、 $f(t)$ に対する $\tilde{f}(p) = \mathcal{L}(f(t))(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt} dt$ に対して虚軸に平行な積分

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\tau_0}^{i\infty+\tau_0} \tilde{f}(p)e^{pt} dp$$

で与えられる。ここで τ_0 は適当に選ぶことにより $\tilde{f}(p)$ の特異点がすべて積分路の左側に来るように調整する。例えば $\tilde{f}(p) = \frac{1}{(p-\lambda)^n}$ の場合、

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\tau_0}^{i\infty+\tau_0} \frac{e^{pt}}{(p-\lambda)^n} dp = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{pt}}{(p-\lambda)^n} dp = \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{\lambda t} \quad (9.2)$$

ここで第二項から第三項に行く際に積分路を変更して $\tilde{f}(p)$ の特異点 $p = \lambda$ を内部に含むような円周上の積分に書き直した。 $(t > 0)$ なので $\exp(pt)$ は $\mathcal{R}(p) < 0$ となる半円周上の積分路に対してゼロになるのでその部分を追加する。) 右辺の Laplace 変換は $\tilde{f}(p)$ を再現する。

一般に Laplace 変換の逆変換は変数 p についての複素関数 $\tilde{f}(p)e^{pt}$ の特異点の留数の和と等しい。

これから見るように、定数係数線形微分方程式は Laplace 変換により代数方程式に帰着する。それを解き逆像を求めると微分方程式を解いたことになる。代数方程式の解は有理関数になるので部分分数展開、または、逆 Laplace 変換を用いて解を求めることができる。

9.6 Laplace 変換を用いた定数係数線形微分方程式の解法

9.1 節で行った微分方程式の解法はより Laplace 変換を用いるとより直接的に行うことができる。初期条件をあからさまに含めることができる。

微分方程式を $\phi(D)x(t) = Q(t)$, $\phi(k) = k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_n = \prod_i (k - \lambda_i)^{k_i}$ とする。 $\mathcal{L}(x(t)) = \tilde{x}(p)$, $\mathcal{L}(Q(t)) = \tilde{Q}(p)$ と置くと

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x^{(n)}(t))(p) &= p^n \tilde{x}(p) - p^{n-1} x(0) - \dots - x^{(n-1)}(0) \\ \mathcal{L}(x^{(n-1)}(t))(p) &= p^{n-1} \tilde{x}(p) - p^{n-2} x(0) - \dots - x^{(n-2)}(0) \end{aligned}$$

などのように変換されるので全体をまとめると微分方程式は代数方程式に変換される。

$$\mathcal{L}(\phi(D)x) = \phi(p)\tilde{x}(p) - R(p) = \tilde{Q}(p)$$

ここで $R(p)$ は初期値により決まるたかだか $n - 1$ 次の多項式。 $\phi(p) = \prod_i (p - \lambda_i)^{k_i}$ のように因数分解すると \tilde{x} は部分分数展開により以下のような形に求められる。

$$\tilde{x}(p) = \frac{R(p) + \tilde{Q}(p)}{\phi(p)}$$

ここで $R(p)$ は多項式、 $\tilde{Q}(p)$ は有理式であることを仮定すると $\tilde{x}(p)$ は有理式であり、複素平面上に有限個の極を持つ関数となる。 $x(t)$ を求めるためには逆 Laplace 変換を用いればよいが、上で述べたようにそれは $\tilde{x}(p)e^{pt}$ の留数の和となる。

9.6.1 微分方程式の解法の例

微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x(t) = A \cos(\omega t)$$

を初期条件 $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ の下で解く。両辺の Laplace 変換を取ると

$$p^2 \tilde{x}(p) - px(0) - \dot{x}(0) + \omega_0^2 \tilde{x}(p) = (p^2 + \omega_0^2) \tilde{x}(p) = \frac{Ap}{p^2 + \omega^2}$$

これから

$$\tilde{x}(p) = \frac{Ap}{(p^2 + \omega^2)(p^2 + \omega_0^2)}$$

Laplace 逆変換を用いると、特異点 $p = \pm i\omega$, $p = \pm i\omega_0$ の留数の和となるので

$$x(t) = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2} (\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t))$$